Curso de ingreso 2017

Matemática 0

Dirección de Articulación e Ingreso
Secretaría Académica
FACULTAD DE INFORMÁTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CAPÍTULO 1: Lógica y Conjuntos

Este módulo tiene por objetivo el familiarizarse con los elementos básicos de la lógica simbólica; lo que permitirá establecer la validez de un enunciado complejo a partir de sus componentes. El álgebra proposicional abarca conceptos que son muy utilizados en la carrera que elegiste. Pretendemos que el alumno incorpore el bagaje lógico para que sea capaz de abordar el estudio de la teoría de conjuntos. La idea de conjunto no requiere demasiada presentación, el objetivo aquí es identificar los elementos que pertenecen y los que no a un conjunto. Interpretar correctamente la notación simbólica en la definición de conjuntos, y tratar de explicar a través de estos resultados la naturaleza del trabajo matemático. Realizar las primeras demostraciones en la teoría de conjuntos.

1.1 Proposiciones

En el desarrollo de cualquier teoría matemática se hacen afirmaciones en forma de frases y que tienen un sentido pleno. Tales afirmaciones, verbales o escritas, las denominaremos enunciados o proposiciones.

Definición de Proposición: oración con valor declarativo o informativo, de la cual se puede predicar su verdad o falsedad.

Es decir,

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

La proposición es el significado de una idea, enunciado, conjunto de palabras o letras a las que se les puede asignar uno y sólo uno de los valores de verdad, que pueden ser:

VERDADERO (V) o FALSO (F)

Por lo general, a las proposiciones se las representa por las letras del alfabeto desde la letra p, es decir, p, q, r, s, t,... etc. Así, por ejemplo, podemos citar las siguientes proposiciones y su valor de verdad:

p: $15 + 5 = 21$ (F)

q: Santa Fe es una provincia Argentina. (V)

r: El número 15 es divisible por 3. (V)

s: El perro es un ave. (F)

Aclaremos que la mayor parte de las veces los enunciados adquieren el carácter de proposición en un contexto determinado; esto es un enunciado puede ser una proposición en un sistema determinado, y no serlo en otro.

Para ser más claro: la oración "María va al teatro" no es una proposición, a menos que yo sepa a qué María (de los millones que existen) se refiere, y si "va al teatro" quiere decir que va habitualmente al teatro o que lo hace de vez en cuando o que está yendo al teatro en este instante determinado. Por otra parte si María es mi hermana, y en este momento está saliendo, la afirmación "María va al teatro" es una proposición, puesto que claramente es verdadera o falsa. Entonces, cuando digamos que cierto enunciado es una proposición tendremos en claro que lo es en un determinado contexto, en el cual es, sin lugar a dudas, verdadera o falsa.

Expresiones No Proposicionales

Son aquellos enunciados a los que no se les puede asignar un valor de verdad. Entre ellos tenemos a los exclamativos, interrogativos o imperativos.

Así tenemos, por ejemplo:

– ¿Cómo te llamas?

– Prohibido pasar.

– ¡Salí de ahí!

Clasificación de las Proposiciones

Aquellas proposiciones que constan o se las puede representar por una sola variable, se llaman proposiciones simples o atómicas. Por ejemplo, sea la proposición "p: 3 + 6 = 9" es una proposición simple o atómica.

Cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples, se le llama proposición compuesta o molecular. Así, por ejemplo:

$$\underbrace{\text{Pitágoras era griego}}_{p} \text{ y } \underbrace{\text{era geómetra}}_{q}$$

Encontramos dos enunciados. El primero (p) nos afirma que Pitágoras era griego y el segundo (q) que Pitágoras era geómetra

No es necesario conocer si una afirmación es verdadera o falsa (es decir, su valor de verdad) para saber que es una proposición. Por ejemplo: "Hay vida extraterrestre" es una proposición, independientemente de que algunos crean que es verdadera y otros que es falsa, puesto que claramente o bien existe vida extraterrestre o bien no existe.

Nuestro sencillo estudio de las proposiciones no tratará de establecer el valor de verdad de una proposición dada, lo que muchas veces es tarea de los científicos ("el universo se originó en la gran explosión"), los filósofos ("pienso, por lo tanto existo"), o las novias y novios ("te quiero…").

Lo que haremos es analizar el valor de verdad de unas en función de los valores de verdad de las otras.

1.2 Conectivos Lógicos

A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir que se puede operar con proposiciones, y para ello se utilizan ciertos símbolos llamados conectivos lógicos. A continuación vemos una concreta definición de cada uno:

1.2.1 Operaciones Proposicionales

Definiremos las operaciones entre proposiciones en el sentido siguiente: dada una o más proposiciones, de las que se conoce los valores de verdad, se trata de caracterizar la proposición resultante a través de su valor de verdad. A tal efecto, estudiaremos a continuación el uso y significado de los diferentes conectivos lógicos.

Negación

Dada una proposición p, se denomina la negación de p a otra proposición denotada por ⌐ p (se lee "no p") que le asigna el valor de verdad opuesto al de p. Por ejemplo:

p: Diego estudia matemática.

⌐ p: Diego no estudia matemática.

Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

p	⌐ p
V	F
F	V

Observamos aquí que al valor V de p, la negación le hace corresponder el valor F, y viceversa.

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

Ejemplo: La negación de p: "Santa Fé es una provincia argentina." es

⌐ p: Santa Fé no es una provincia argentina.

Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición

$p \wedge q$ (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define esta operación, establece que la conjunción es verdadera sólo si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso es falsa.

Ejemplos: Sea la declaración:

$$\underbrace{\text{5 es un número impar}}_{p} \underset{\wedge}{\text{y}} \underbrace{\text{6 es un número par}}_{q}$$

Vemos que está compuesta de dos proposiciones a las que llamaremos p y q, que son

p: 5 es un número impar

q: 6 es un número par

Por ser ambas verdaderas, la conjunción de ellas es verdadera.

Ahora bien, sea la declaración:

Hoy es el día 3 de noviembre y mañana es el día de 5 de noviembre.

Esta conjunción es falsa, ya que no pueden ser simultáneamente verdaderas ambas proposiciones.

Disyunción

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición compuesta $p \vee q$, cuya tabla de valor de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

"Marte es un planeta o una estrella"

"Córdoba es una provincia argentina o Uruguay es un país latinoamericano"

"El 3 es par o el 8 es primo"

- Intente Ud. identificar las proposiciones p y q, y sus valores de verdad.

Condicional (o implicación)

Consideremos el enunciado: "Si apruebas Filosofía, te dejaré ir al viaje de fin de curso". Este enunciado está formado por dos proposiciones atómicas:

p: "Apruebas Filosofía"

q: "Te dejaré ir al viaje de fin de curso"

Lo que nuestro enunciado original afirma es esto: si p es verdad, entonces q también es verdad, o, dicho de modo más sencillo, si p entonces q.

En el enunciado $p \to q$, se dice que p es el antecedente (o hipótesis) y q el consecuente (o conclusión).

El condicional $p \to q$ se lee "p implica q" o bien "si p entonces q". Un condicional siempre es verdadero, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Por lo tanto, su valor de verdad queda definido por la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En las columnas p y q aparecen las cuatro posibles combinaciones de los valores de verdad para p y q, y en la columna p→q aparecen enumerados los valores de verdad de p→q para cada una de esas combinaciones. Por ejemplo, la segunda fila de la tabla nos dice que cuando p es verdadero y q falso, el enunciado p→q es falso.

Importante: Es destacable que la implicación puede ser cierta aunque el consecuente sea falso. Así, si no apruebas Filosofía, pero yo no te permito ir al viaje de fin de curso, la implicación "Si apruebas Filosofía, te dejaré ir al viaje de fin de curso" es verdadera.

Otras denominaciones que representan también la proposición $p \to q$ son:

p sólo si q

q si p

p es condición suficiente para q

q es condición necesaria para p

Ejemplos:

Ser divisible por 2 es condición necesaria para ser divisible por 6, pero no suficiente.

Ser divisible por 8 es condición suficiente para ser divisible por 4, pero no necesaria.

- Analice y ejemplifique cada una de las 4 posibilidades.

Ejercicio: Determina el valor de las siguientes implicaciones y justifica por qué.

a) Si llueve hacia arriba, entonces eres un ser humano.

b) Si 2 + 2 = 4, entonces las ranas tienen pelo.

c) Si sabes leer, entonces los círculos son cuadrados.

d) Si los burros vuelan, entonces las tortugas saben inglés.

Ejercicio: Escribe alguna de estas proposiciones con las denominaciones vistas previamente.

El recíproco del implicador

- Se puede ver por medio de las tablas de verdad (hacer) que tanto la conjunción como la disyunción tienen la **propiedad conmutativa**, es decir el orden de los enunciados de las conjunciones o de las disyunciones no altera su valor de verdad: es lo mismo $p \wedge q$ que $q \wedge p$, y también es lo mismo $p \vee q$ que $q \vee p$.

Pero, ¿ocurre lo mismo con el implicador? ¿Es lo mismo $p \to q$ que $q \to p$? La respuesta es que no. Veámoslo con cierto detenimiento.

Se dice que $q \to p$ es el **recíproco** de $p \to q$. El implicador no tiene la propiedad conmutativa y esto se aprecia en la comparación de las tablas de verdad de $p \to q$ y de su recíproco $q \to p$:

Valores diferentes

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Veámoslo con un ejemplo:

Sea p el enunciado "Llueve", y q: "El suelo está mojado", siendo, por consiguiente $p \to q$ "Si llueve, entonces el suelo está mojado". Veamos el recíproco de este enunciado: $q \to p$: "Si el suelo está mojado, entonces llueve". Supongamos que p es verdadero, y q falso:

$p \to q$ ("Si llueve, entonces el suelo está mojado") es necesariamente falso.

$q \to p$ ("Si el suelo está mojado, entonces llueve") es verdadero, pues una falsedad implica cualquier cosa manteniendo la verdad del condicional.

El contrarrecíproco del implicador

Aunque un enunciado condicional y su recíproco no tienen los mismos valores de verdad, si los tienen el condicional y su contrarrecíproco.

El contrarrecíproco del enunciado $p \to q$ es $\neg q \to \neg p$ (es decir, la negación de cada uno de los enunciados del recíproco). Veámoslo comparando tablas de verdad:

Mismos valores

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Comparemos el mismo ejemplo:

En el ejemplo anterior donde p: "Llueve", q: "El suelo está mojado", $p\rightarrow q$ "Si llueve, entonces el suelo está mojado". El contrarrecíproco es $\neg q\rightarrow\neg p$, que significa que "Si el suelo no está mojado, entonces no llueve", que es lógicamente equivalente al enunciado primitivo $p\rightarrow q$.

Ejercicio: Escribe el recíproco y el contrarrecíproco de los siguientes condicionales

$(\neg p) \rightarrow (s \vee q)$

$p \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

$(q \wedge h) \rightarrow (\neg s \wedge \neg t)$

El bicondicional (o coimplicación)

Ya hemos comprobado que $p\rightarrow q$ no es lo mismo que $q\rightarrow p$. Puede ocurrir, sin embargo, que tanto $p\rightarrow q$ como $q\rightarrow p$ sean verdaderos. Por ejemplo, si p:"La Tierra es cúbica", y q:"El Sol es un planeta", entonces tanto $p\rightarrow q$ como $q\rightarrow p$ son verdaderos, porque tanto p como q son falsos. Es necesario tener esto en cuenta para entender bien el concepto de bicondicional.

Mediante el bicondicional lo $\leftrightarrow$ que queremos decir es que un enunciado es a la vez condición necesaria y suficiente para otro. El bicondicional o coimplicador $p\leftrightarrow q$, que se lee "p si y sólo si q".

Así, si digo que p: "apruebo Filosofía" y q: "saco un 5 o más en el examen de Lógica" la fórmula $p\leftrightarrow q$ significa "apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el examen de Lógica". Con este "si y sólo si" se quiere poner de manifiesto tres cosas:

1. Al introducir el primer condicional "si" (en "si y sólo si"), introduzco el antecedente, y por tanto afirmo que $p\rightarrow q$, (es decir aprobaré Filosofía si saco 5 o más en el examen de Lógica), decir p si q es lo mismo que q entonces p.
2. Al introducir "sólo si" (en "si y sólo si"), introduzco el consecuente, buscando comunicar que $q\rightarrow p$, (es decir, que si saco un 5 o más en el examen de Lógica, entonces apruebo Filosofía).
3. Al utilizar el conectivo "y" (en "si y sólo si"), quiero comunicar la conjunción de $p\rightarrow q$ con $q\rightarrow p$.

Así pues, el enunciado "apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el examen de Lógica" se puede formalizar de dos formas equivalentes: $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$, o bien $p\leftrightarrow q$.

En consecuencia, el enunciado $p\leftrightarrow q$ queda definido por el enunciado $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$. Por esta razón, el símbolo $\leftrightarrow$ se llama bicondicional, y la tabla de verdad para $p\leftrightarrow q$ es la misma que la de $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble flecha horizontal $\leftrightarrow$ es el operador bicondicional.

Fíjate que de la observación de la tabla de verdad deducimos que para que $p \leftrightarrow q$ sea verdadera, tanto p como q han de tener los mismos valores de verdad, y en caso contrario es falsa.

La formalización del bicondicional

El coimplicador puede tener varias expresiones equivalentes en lenguaje natural. Así $p \leftrightarrow q$ es la formalización de las siguientes expresiones de lenguaje natural:

- p si y sólo si q
- p es necesario y suficiente para q
- p es equivalente a q

Fíjate que $p \leftrightarrow q$ y $q \leftrightarrow p$ tendrían totalmente los mismos valores de verdad, puesto que ambas son coimplicaciones y por lo tanto si sus valores de verdad son los mismos, son verdaderas, y son falsas en los demás casos. En consecuencia, podemos reformular los enunciados anteriores intercambiando p y q:

- q si y sólo si p
- q es necesario y suficiente para p
- q es equivalente a p

Ejemplos del bicondicional

Ejemplos de bicondicionales verdaderos:	Motivos por los que $p \leftrightarrow q$ es verdadera:	
$p \leftrightarrow q$		
(a) "La Tierra es cúbica si y sólo si el Sol es un planeta"	p: "La Tierra es cúbica": F	q: "El Sol es un planeta": F
(b) "La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es una estrella"	p: "La Tierra es esférica": V	q: "El Sol es una estrella": V
(c) "Los cocodrilos tienen ruedas si y sólo si los sapos bailan flamenco"	p: "Los cocodrilos tienen ruedas": F	q: "Los sapos bailan flamenco": F
(d) "Los cocodrilos no tienen ruedas si y sólo si los sapos no bailan flamenco".	p: "Los cocodrilos no tienen ruedas": V	q: "Los sapos no bailan flamenco": V

Ejemplos de bicondicionales falsos:	Motivos por los que $p \leftrightarrow q$ es falsa:	
$p \leftrightarrow q$		
(a) "La Tierra es cúbica si y sólo si 2+2=4"	p: "La Tierra es cúbica": F	q: "2+2=4": V
(b) "El Sol es una estrella si y sólo si 1+2=4"	p: "El Sol es una estrella": V	q: "1+2=4": F
(c) "Los cocodrilos tienen ruedas si y sólo si los sapos no bailan flamenco"	p: "Los cocodrilos tienen ruedas": F	q: "Los sapos no bailan flamenco": V
(d) "El sol es una estrella si y sólo si Napoleón escribió el Quijote"	p: "El sol es una estrella": V	q: "Napoleón escribió el Quijote": F

1.2.2 Equivalencia lógica

Decimos que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes. Si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad. Se indican como $P \Leftrightarrow Q$, siendo P y Q proposiciones no necesariamente atómicas.

Importante: usamos la $\Leftrightarrow$ para indicar la equivalencia, mientras que $\leftrightarrow$ simboliza al bicondicional.

__Ejercicio__: Probar que las siguientes propiedades se satisfacen, probando las equivalencias lógicas (construyendo las tablas de verdad).

1.- Doble negación: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

2.- Leyes conmutativas: a) $(p \land q) \Leftrightarrow (q \land p)$ b) $(p \lor q) \Leftrightarrow (q \lor p)$

3.- Leyes asociativas: a) $[(p \land q) \land r] \Leftrightarrow [p \land (q \land r)]$ b) $[(p \lor q) \lor r] \Leftrightarrow [p \lor (q \lor r)]$

4.- Leyes distributivas: a) $[p \lor (q \land r)] \Leftrightarrow [(p \lor q) \land (p \lor r)]$ b) $[p \land (q \lor r)] \Leftrightarrow [(p \land q) \lor (p \land r)]$

5.- Leyes de De Morgan: a) $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$ b) $\neg(p \land q) \Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

6.- Implicación: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q)$

1.2.3 Tautología

Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es el contrarrecíproco, y verificamos por medio de la tabla de verdad que es una tautología, mirando el valor de verdad de la última columna:

p	q	¬p	¬q	p→ q	¬q → ¬p	(p→q) ↔ (¬ q→ ¬p)
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V

Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

1.2.4 Contradicción

A diferencia de la tautología, que siempre es verdadera, aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, se denomina **contradicción**. Una de las más usadas y más sencilla es p ∧ ¬p, como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	¬p	p ∧ ¬p
F	V	F
V	F	F

Ejemplo: Dada la proposición p: La puerta es verde.

La proposición p∧ ¬p equivale a decir que "La puerta es verde y la puerta no es verde".

Por otra parte, si una proposición compuesta cuyos resultados en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado V y F le llama **contingente o contingencia.**

Ejercicio: A partir de los enunciados, simbolícelos y obtenga conclusiones:

a) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.

Juan Nació en Mendoza.

b) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.

Juan no es argentino.

Ejercicio: Obtener el valor de verdad de la proposición (p∧q)∧(r∨s), sabiendo que el valor de verdad de p es Falsa.

Resolución: Sabiendo que p es Falsa, la conjunción $(p \wedge q)$ también lo es, ya sea q V ó F. Luego, la siguiente conjunción $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$ también lo es, independientemente de los valores de las proposiciones r y s.

Esta es la forma en que una computadora generalmente resuelve este problema, generando un árbol de expresión como el de la figura y se recorre evaluando las expresiones o proposiciones. Si podemos "cortar" una rama del árbol y no evaluarla, y de todos modos obtener el resultado nos ahorra tiempo de cálculo.

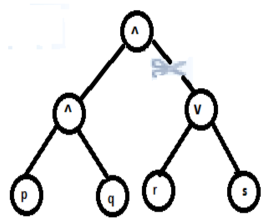


Fig.: árbol, cortamos la rama de r y s.

- Realice la tabla de verdad, para convencerse de este hecho. Note que de esta manera tendrá que realizar una tabla con 16 filas.

1.3 Esquemas proposicionales en una indeterminada

En Álgebra y Aritmética suele decirse que la siguiente expresión: $x + 2 = 5$ es una ecuación.
Tal expresión no es una proposición, pues no tiene sentido afirmar que sea verdadera o falsa, pero existe algún reemplazo de x por un número de modo tal que se transforma en una proposición.

Por ejemplo, si $x= 7$ $7 + 2 = 5$, la cual en este caso es Falsa.

Definición: Se llama **esquema proposicional en la indeterminada x** a toda expresión que contiene a x, y posee la siguiente propiedad: "Existe por lo menos un nombre tal que la expresión obtenida sustituyendo la indeterminada por dicho nombre, es una proposición".

Convención: Llamaremos simplemente esquema en lugar de "esquema proposicional".
Las indeterminadas suelen llamarse variables o incógnitas.

Ejemplos

1. "x es blanca" es esquema pues existe una constante "esta flor" que en lugar de la variable x produce la siguiente proposición: Esta flor es blanca.

Que esta proposición sea Verdadera o Falsa dependerá de cual sea la flor particular que se está señalando.

2. ¿Qué es x? NO es un esquema, pues no hay constante que sustituida en la variable produzca una proposición.

Ejercicios

Si x es una indeterminada, decir cuáles de las siguientes expresiones son esquemas:

1) Juan y x fueron al teatro.
2) x es perro.
3) Distancia del punto P a x es igual a 2. (El punto P es conocido)
4) x doy.
5) $x \geq 0$ y $x \leq 3$

Vamos a utilizar símbolos tales como P(x), Q (x), para designar esquemas de incógnita x.

DEFINICIÓN

Si P(x) es un esquema en x y **a** es una constante, se llama **valor de P(x)** en la constante **a** a la expresión obtenida de P(x) sustituyendo x por **a.**
El valor de P(x) para **a** se designa P(**a**).

Ejemplo

P(x): x no es un objeto y **a** es "esta casa"

P(a): "Esta casa no es un objeto"

Vamos a definir al conjunto de valores de verdad de P, lo simbolizamos con V(P), al conjunto formado por todas las constantes **a** que hacen verdadera la proposición P(a).

1.4 Cuantificadores: Universal y Existencial

Hasta ahora se ha visto un método para obtener proposiciones a partir de esquemas P(x): sustituir la variable x por una constante adecuada **a** de tal forma que P(**a**) sea una proposición.
Hay otro método distinto que transforma un esquema en proposición a partir del esquema P(x): es el método de los operadores o cuantificadores.

Como vimos en los ejemplos, uno trata de reemplazar la incógnita por valores que tenga cierto sentido como para obtener una proposición, por ejemplo, si el esquema es
P(x): $x > 5$, pensamos que x puede ser un número, y dependiendo de si x es 8 ó x es 2, será verdadera o falsa; pero no pensamos en reemplazar x por algún color del arco iris. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición de Conjunto Universal: Llamaremos de esta forma al conjunto al cual pertenecen los valores que puedan tomar las variables. Lo notaremos por U y lo nombraremos por conjunto universal o, simplemente, universo. Debe contener, al menos, un elemento.

Pero ahora podemos por medio de los cuantificadores convertir en proposiciones de la siguiente manera:

El cuantificador existencial,
"Para algún x se verifica p(x)"
"Existe x tal que se cumple p(x)"
"Para al menos un x se satisface p(x)"
son proposiciones que se escriben como "**(∃x)(p(x))** "

El cuantificador universal,
"Para todo x se verifica p(x)"
"Para cualquier x tal que se cumple p(x)"
"Para cada x se satisface p(x)"
son proposiciones que se escriben como "**(∀x)(p(x))** "

- Analiza cuidadosamente el siguiente ejercicio: **Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones y decide el valor de verdad de las mismas.**

p: "Todo número real mayor que 2 tiene un cuadrado mayor que él mismo."

q: "Algunos números reales con cuadrado mayor que 4 son menores que 2."

r : "Cualquier número satisface $x^2 - x \geq 0$ o no es mayor que 2"

Observa que en "r" hace falta el conjunto universal …
¿Qué ocurre si U está formado por los números reales? ¿Y si a U lo forman los enteros?

Ejercicio: En cada caso decir si se trata de esquemas, en tal caso transformarlo en una proposición y hallar su valor de verdad:

1. P(n): $n+1>n$.
2. Q(n): n^2+1.
3. R(n): $n^2-3n+2=0$.
4. S(n): *n* es un número racional.

Alcance de un operador

Sea el siguiente ejemplo:

(∃x) x es verde ∧ x es rojo (*)

Vemos que el operador existencial se refiere únicamente al esquema x es verde y NO a x es rojo, o sea que el alcance del operador llega únicamente al primer esquema, si quisiéramos que alcance a los dos esquemas, tendríamos que poner

$(\exists x):(x \text{ es verde } \wedge \text{ x es rojo })$ o sea usaríamos paréntesis.

Del ejemplo precedente podemos deducir que: La expresión "x es verde "es el esquema más simple que aparece en (*) inmediatamente después del operador.

La expresión “x es verde $\wedge$ x es rojo“, también es un esquema pero no es el más simple. La expresión x es rojo es un esquema también simple pero no aparece después del operador.

<u>Definición:</u> Se llama **<u>alcance de un operador en x</u>** al esquema más simple que aparece inmediatamente después del operador, salvo que se presenten paréntesis, en cuyo caso deben aplicarse las reglas habituales referentes al uso de paréntesis.

<u>Negación de operadores</u>

Sea la siguiente proposición:

(∀n)(n es un número primo), la cuál sabemos es Falsa.

Vamos ahora a negarla

¬(∀n)(n es un número primo)

En lenguaje corriente esto nos dice que no todos los números son primos que es lo mismo que si dijéramos: algunos números no son primos, y simbólicamente

(∃n)(n no es un número primo)

De lo anterior se puede deducir que son expresiones sinónimas

$$\boxed{\neg(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))}$$

De igual manera se obtiene:

$$\boxed{\neg(\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))}$$

Por lo tanto, en palabras decimos que:

La negación de un cuantificador universal (existencial, respectivamente) es equivalente a la afirmación de un cuantificador existencial (universal) cuyo alcance es la negación del alcance del primero.

<u>Ejercicio</u>: Expresar en lenguaje corriente las siguientes proposiciones. Establecer el alcance de los operadores y proponer el Universo.

a) (∀x)(x es metal → x se funde)

b) (∀x)(x es metal) ∨ el oro se funde

c) (∃x)(x es cuadrado) → (∃x)(x es paralelogramo)

d) $\neg(\forall x)$(x es hombre $\rightarrow$ x es mortal)

1.5 Ejercicios

1.- Indicar cuáles de las siguientes frases son proposiciones

a) Un cuadrado tiene 3 lados.

b) $x > 2$.

c) $x + 3 = 2 \quad x \in \Re$.

d) El dígito 26003 de π es 4.

e) El mes de abril del 2014.

2.- Expresar las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas y retraducir su negación al lenguaje corriente:

a) Juana no es justa pero mantiene el orden.

b) Los alumnos conocen a los simuladores y los desprecian.

c) Si los alumnos conocen a los simuladores, entonces los desprecian.

3.- Construir las tablas de verdad de:

a) $\neg(p \wedge q)$

b) $\neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

4.- Expresar mediante operadores y el símbolo de implicación, las proposiciones:

“Todos los hombres son mortales”
“Hay algún número que no es primo”

5.- Sean los esquemas p(x): $x+4=3$ y q(x): $x^2-1=0$.

a) ¿Existe un universo en el cuál la proposición $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ resulte verdadera? Justifique.

b) Hallar un universo U en el cuál la proposición anterior sea falsa. Justifique.

6.- Determinar en cada caso si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Justifica tu respuesta.

a) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ r es V

b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$ p es V y r es F

c) $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ q es V

7.- Simbolizar las siguientes proposiciones, usando proposiciones simples y/o esquemas proposicionales.

a) Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito y el conjunto de los números naturales es infinito.
b) Todo número distinto de cero es divisible por 1, -1, por el mismo y por su opuesto.
c) 25 no es divisible por 2 ni por 3 pero es múltiplo de 5.

8.- Consideremos las siguientes proposiciones p, q, r, s.

p: La galera era un barco antiguo de comercio.
q: La galera era un barco antiguo de guerra.
r: La galera era un barco antiguo que se movía con velas.
s: La galera era un barco antiguo que se movía con remos.

Escribir con palabras los resultados de las siguientes operaciones

a) $p \wedge q$
b) $(\neg q) \vee (\neg r)$
c) $\neg r \wedge s$
d) $q \vee s$

9.- Hacer las tablas de verdad de las siguientes proposiciones

a) $\neg (p \vee q)$
b) $(\neg q) \wedge (\neg r)$
c) $(\neg s \wedge p) \vee (s \wedge \neg p)$

10.- Simbolizar las siguientes proposiciones:

a) Si $5 \geq 3$ entonces $5 - 3 \geq 0$.

b) Si A, B y C son números racionales tales que 2A+3B-5C = 0 entonces A=B=C=0 .

11.- a) Pasar a la forma *si……entonces* y simbolizar

i) Juan irá a Córdoba sólo si consigue pasaje en avión.
ii) Es necesario ser argentino para ser presidente de la república.

b) Expresar y simbolizar utilizando la palabra *suficiente*

i) La temperatura bajará si comienza a soplar el viento del sur.
ii) Si aprobó el examen entonces contestó bien el 40 % de sus preguntas.

c) Expresar y simbolizar utilizando la palabra *necesario*

i) Si un triángulo está inscripto en un semicírculo entonces es rectángulo.
ii) Pedro es argentino sólo si es americano.

12.- Establecer si las siguientes fórmulas constituyen tautologías, contradicciones o contingencias.

$$(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$$
$$(p \vee q) \rightarrow p$$
$$(q \rightarrow p) \vee p$$

13.- Simbolizar utilizando esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos.

a) Hay objetos rojos y además hay objetos verdes.

b) Hay números pares o todos los números son múltiplos de 3.

c) No todos los números son múltiplos de 5.

d) Todos los números no son múltiplos de 5.

14.- Simbolizar utilizando cuantificadores y esquemas convenientes:

a) Algunos hombres son santos.

b) Ninguna virtud es una cualidad natural.

c) No todo número real es un número racional.

d) Todos los números primos son impares excepto el 2.

e) Si existe un número natural menor que 4 entonces todo múltiplo de 6 es múltiplo de 5.

15.- Encontrar proposiciones equivalentes usando las leyes de De Morgan y sustituciones adecuadas:

a) $p \wedge \neg q$

b) $\neg(\neg p \wedge q)$

c) $(p \wedge q) \vee q$

d) $((p \wedge q) \wedge ((q \wedge \neg p)$

1.6 Teoría de Conjuntos

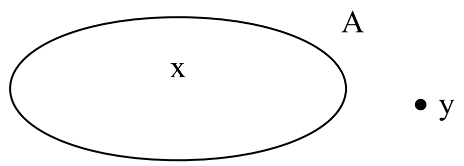
Un **conjunto** es la reunión de entes u objetos bien definidos y diferenciables entre si, que en general tienen características similares. Estos entes u objetos se llaman **elementos** del conjunto.

Si *a* es un elemento del conjunto *A* se denota con la ***relación de pertenencia*** $\mathbf{a \in A}$. En caso contrario, si *a* no es un elemento de *A* se denota $a \notin A$.

1.6.1 Formas de Expresar un Conjunto

- Diagrama de Venn

Seguramente esté familiarizado con gráficos como el siguiente, donde el elemento $x \in A$ y el elemento $y \notin A$.



- Expresado por Extensión

Cuando damos de manera explícita los elementos.

Por ejemplo: $A=\{1, 3, 5, 7\}$

- Expresado por Comprensión

Cuando expresamos la propiedad definidora del conjunto.

En el ejemplo anterior, $A=\{x\text{: x es un número impar menor o igual a } 7\}=$

$=\{x : x \text{ es impar} \wedge x \leq 7\}$

Se lee x tal que x es impar y x es menor o igual que 7

Ejercicio: Considere $\{x : x > 1 \wedge 2.x = 1\}$ ¿Es un conjunto, qué elementos tiene?

Ejemplos de Conjuntos muy utilizados en matemática.

- Ya vimos en lógica, al conjunto universal o universo, que contiene a todos los elementos. Notado por la letra U.
- El conjunto vacío, es aquél que no contiene elementos. Se nota $\varnothing$ ó sólo con $\{\}$.
- Conjuntos numéricos: números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, que desarrollaremos en el siguiente módulo.

1.6.2 Relaciones entre elementos y conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que:

- A está contenido en B ó A es un subconjunto de B, si todo elemento de A es también un elemento de B.

En símbolos $A \subset B$ si y sólo si se verifica el condicional $(\forall x)\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

- Los conjuntos A y B son iguales, si y sólo si tienen los mismos elementos.

En símbolos $A = B$ si y sólo si se verifica el bicondicional $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

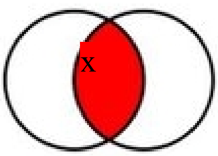
Ejercicio: Como verá, hay una relación entre la contención y el condicional. ¿Cómo expresaría entonces la igualdad? Utilice su deducción para comparar los siguientes conjuntos:

$$A=\{2,3\},\ B=\{x : x(x-3) = 0\} \text{ y } C=\{x: x(x-3)(x-1) = 0\}$$

1.6.3 Operaciones con Conjuntos

1.6.3.1 Intersección

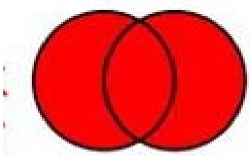
Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cap B$ que llamaremos intersección de A y B, como el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos.



$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

1.6.3.2 Unión

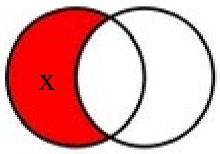
Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cup B$ que llamaremos unión de A y B, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto.



$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

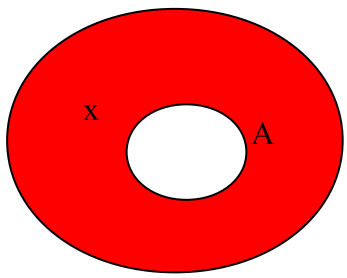
1.6.3.3 Diferencia

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto A - B que llamaremos diferencia entre A y B (en ese orden), como el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.



$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

1.6.3.4 Complemento



Si $A \subset B$, se define el complemento de A con respecto a B como el conjunto formado por los elementos de B que no pertenecen a A.

$$C_B A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

En particular, si B=U, decimos directamente el complemento de A, sin necesidad de aclarar respecto a quién. En general, usaremos B=U y simplificamos la notación usando: A^C.

Ejercicios

1. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:

A = {x: x es una letra de la palabra *informática*}
B = {x: x una cifra del número 3.502.332}
C = {x: x es un diptongo de la palabra *volumen*}

2. Dados los conjuntos A={1,2,3}, B={1,2,4,5} y C={2,4}, calcule los conjuntos $A \cap B$; $A \cup B$; $A - B$; $C_B C$; $B - A$; $A \cap B \cap C$; $A - (B - C)$; $(A - B) - C$; $B - C$. Compare los resultados y obtenga conclusiones posibles.

3. ¿Cuál es la intersección entre los conjuntos {{a}} y {a}?

4. Complete las proposiciones siguientes con los símbolos $\in$ o $\notin$:

2 ___ $\{1,3,5,7\}$, 5 ___ $\{2,4,5,6\}$, 2 ___ $\{4,5,6,7\}$,
0 ___ Ø, París ___ {x/x es el nombre de un país }, $\{a\}$___ $\{\{a\}\}$,
2__$\{1,2\}\cap\{1,6\}$, Jujuy___{x/x es provincia Argentina}, a____$\{\{a\}\}$,
2__$\{1,2\}\cup\{1,6\}$, 2__$\{1,2\}-\{1,6\}$, 1__$\{1,2\}-\{1,6\}$,

5. ¿Cómo puede traducir las leyes de De Morgan con la notación de conjuntos?

6. Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subset B$. Determinar si son V ó F los siguientes enunciados, justificando la respuesta:

- Siempre $\exists$ x tal que $x \in A \wedge x \notin B$
- Siempre $\exists$ x tal que $x \in B \wedge x \notin A$
- $x \notin B \rightarrow x \notin A$
- $x \notin A \rightarrow x \notin B$
- A y B no tienen elementos en común (¿cómo simbolizaría esta proposición, según la notación de conjuntos?).

7. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset C$. Sabiendo que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ y $f \notin C$, ¿cuáles de las siguientes informaciones son ciertas? Justifique.

$a \in C$ $\quad$ $b \notin A$ $\quad$ $b \in A$
$c \notin A$ $\quad$ $e \notin A$ $\quad$ $f \notin A$
$d \in B$ $\quad$ $f \in C_C C$ $\quad$ $c \in C - B$
$a \in C \cap B$ $\quad$ $b \in C_B A$ $\quad$ $d \notin A \cap C$

1.6.4. Relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Como habrán notado, existe una relación muy estrecha entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional.

- Para mostrar dicha relación, podemos completar el siguiente cuadro:

Conjuntos				$A \cap B$	$C_U A$	A-B
Proposiciones	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a \vee b$			

Además, el conjunto vacío se corresponde con una *contradicción* y el conjunto universal con una *tautología*.

Mediante esta correspondencia, todos los resultados sobre conjuntos se pueden reescribir en términos de lógica proposicional y viceversa; como habrá podido concluir en los ejercicios anteriores.

A continuación probaremos alguna de las propiedades de unión e intersección, que Ud. ha realizado para conjuntos concretos, con el propósito de mostrar un buen ejercicio de razonamiento.

Propiedad Conmutativa para la Unión: Cualesquiera sean los conjuntos A y B,

$$\boxed{A \cup B = B \cup A}$$

Sea $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

Donde la primera y la tercera equivalencia se deben a la definición de unión, mientras que la segunda es debido a la propiedad conmutativa de la disyunción (que Ud. puede demostrar por medio de la tabla de verdad): $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.

- Ud. puede probar de manera equivalente, la propiedad conmutativa para la intersección.

Propiedad Asociativa para la Unión: Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C,

$$\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$$

Sea $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

Donde la primera y la tercera equivalencia se deben a la definición de unión, mientras que la segunda es debido a la propiedad asociativa de la disyunción (que Ud. puede demostrar por medio de la tabla de verdad): $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

- Ud. puede probar de manera equivalente, la propiedad asociativa para la intersección.

Ejercicio: Probar las siguientes propiedades:

1. Idempotencia: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. Absorción: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
3. Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Complementariedad $A \cup C_U A = U$; $A \cap C_U A = \varnothing$
5. $C_U(C_U A)=A$

Resolución: Probaremos la primera igualdad: $A \cup A = A$. Para ello debemos probar la doble contención, es decir $A \cup A \subset A$ y $A \cup A \supset A$

Sea $x \in (A \cup A) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in A) \Leftrightarrow x \in A$. Demostrando la primera contención, la primera equivalencia es debida a la definición de unión y la segunda a la tautología $p \vee p \leftrightarrow p$. Desandando este camino, ya que son equivalentes podemos decir, que también es válida la otra contención.

- Debe el lector completar el ejercicio justificando cada paso.

Ejercicio: Demostrar, justificando cada paso. Haga los diagramas de Venn.

a) $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$

Resolución: Para demostrar una implicación, debemos tener presente que el antecedente o hipótesis se consideran verdaderas y nos ayudan a demostrar el consecuente o tesis, es decir, que en nuestro caso debemos probar la contención $A \subset C$. Para demostrarlo debemos tomar un elemento $x \in A$ y llegar a que $x \in C$. Probémoslo:

Sea $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$. La primera implicación es debida a la definición de contención $A \subset B$ y la segunda a la contención $B \subset C$. Quedando demostrada la contención $A \subset C$. Esta propiedad es conocida como la transitividad de la contención.

b) $A \subset A \cup B$

c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

d) $A \subset B \rightarrow A \cup B = B$

e) $A \subset C \wedge B \subset C \rightarrow (A \cup B) \subset C$

f) $A \subset B \leftrightarrow A \cap C_C B = \varnothing$

g) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

CAPÍTULO 2: Conjuntos Numéricos

Este módulo tiene por objetivo recordar y clarificar las propiedades de las operaciones en los conjuntos numéricos que se consideran imprescindibles para seguir adelante.
Al finalizar el mismo el alumno debe ser capaz de:

a) Identificar los distintos tipos de números
b) Aplicar correctamente las propiedades de las operaciones.

2.1 Números Naturales: (N)

Este conjunto de números existe desde que el hombre tuvo la necesidad de contar, por ejemplo, su rebaño. Es el primer conjunto de números que aprendemos, posee infinitos elementos y aparece como su nombre lo indica en forma natural.
Este conjunto, simbolizado con la letra N, tiene como elementos:

N= $\{0,1,2,....,20,21,....152,153,.......\}$ y así continúa indefinidamente.

Consideremos las dos operaciones fundamentales en N, suma y producto, y veamos sus propiedades:

1) La suma de dos números naturales es un número natural.
2) El 0 es tal que sumado con cualquier otro número no lo modifica.
3) Si se consideran 3 números naturales la suma de los dos primeros más el tercero resulta igual que si al primero se le suma el resultado de la suma de los otros dos.
4) La suma de números naturales es conmutativa.

Ejercicios

1) Expresar simbólicamente las 4 propiedades anteriormente enunciadas.
2) Enunciar las propiedades del producto de números naturales, en lenguaje corriente y simbólicamente.
3) ¿Cuál es la propiedad que enlaza la suma y el producto de naturales? Definirla.

Orden Usual

Con los naturales también se pueden **expresar ordenamientos**, por ejemplo: se ordenan los planetas a partir del sol, la Tierra es el tercero y Marte es el cuarto.

Además dadas dos colecciones de objetos se pueden **comparar** sus cantidades:
"La tierra tiene menos satélites que Júpiter"

Surgen las siguientes preguntas:
¿N tiene primer elemento?, ¿cuál es?, ¿tiene último elemento?

Dados a y b $\in$ N se cumple: $a < b \vee a > b \vee a = b$.

2.2 Números Enteros: (Z)

En N, la resta sólo está definida si el minuendo es mayor o igual al sustraendo. Para que dicha operación no sea tan restringida se creó el conjunto de enteros negativos (notado por - N). Para ello para cada n ε N se introduce **el opuesto de n**, notado **- n** tal que

$$\mathbf{n + (-n) = 0}$$

Entonces **Z** = **N** U (-**N**)

Los números negativos se consideran menores que 0 en el orden usual de los enteros.
A los naturales se los llama enteros positivos, siendo mayores o iguales que 0.

Ley de Monotonía

Si a, b y c $\in$ Z $\wedge$ $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

Ejercicio:

Ejemplificar la Ley de Monotonía con distintas combinaciones en los signos (es decir enteros positivos y negativos) de a, b y c.

Números Pares e Impares

Dentro del conjunto de los enteros se distinguen dos subconjuntos cuya unión componen a Z, ellos son el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares.

DEFINICIÓN: Un número entero **n es par** si y sólo si existe un entero k tal que **n = 2k.**

DEFINICIÓN: Un número entero **n es impar** si y sólo si es el siguiente de un número par.

Divisibilidad

En muchos problemas es necesario saber si el reparto de varios elementos en diferentes grupos se puede hacer equitativamente, es decir, si el número de elementos dividido entre el número de grupos sería una división entera con resto o sin resto. Al dividir un número n $\in$ Z entre otro número d $\in$ Z, la división sea exacta sin resto, diremos que n es **múltiplo** de d, que n es **divisible** entre d, que d es **divisor** de n, o que d **divide** a n.
En este caso, existe un tercer entero (cociente) c, tal que n=c.d. En general, aplicamos la divisibilidad a números enteros, pudiendo ser positivos o negativos.

En símbolos:
Sean n, d $\in$ Z, decimos que **d divide a n** si $\exists$ c $\in$ Z tal que n = c d. Se nota d/n.

Otro concepto importante en la teoría de Números Enteros es el de Número Primo.

DEFINICIÓN: Un número entero se dice **primo** si tiene exactamente 4 divisores: la unidad, el propio número y sus respectivos opuestos.

Ejercicios

1) Sea $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Hallar los elementos primos de A. Justificar.
2) Si un número es primo, ¿qué se puede decir de su opuesto?
3) Hallar la descomposición en primos del número 340 y 195.

2.3 Números Racionales: (Q)

La operación de dividir no es siempre posible en el conjunto Z de los números enteros.

Veamos: puede efectuarse 12: 4 pues existe un entero, el 3, tal que 4. 3 = 12. Pero, no ocurre lo mismo con 4: 12 ó - 3: 7, por lo tanto esta imposibilidad nos conduce a ampliar a Z definiendo un conjunto en el que la división sea realizable en dicho conjunto.

Vamos a definir ahora formalmente este nuevo conjunto que se denomina **conjunto de los números racionales** y se simboliza con la letra Q.

$$Q = \{m/n: m \wedge n \varepsilon Z \wedge n \neq 0\}$$

Los números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse y el resultado es un número racional.

En Q se definen la suma y el producto de forma que las propiedades de estas operaciones se conservan:
Dados:
$\frac{a}{b} y \frac{c}{d} \in Q$ se define la suma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ y el producto $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Se dice que $\frac{a}{b}$ y $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$ son **equivalentes** si y sólo si ad = bc.

Ejemplos

$\frac{9}{-3}$ es equivalente a -3.

$\frac{3}{12}, \frac{1}{4}, \frac{-6}{-24}$ son equivalentes.
Una operación entre racionales no se modifica si reemplazamos uno de ellos por otro que sea equivalente.

Ejercicio: Enuncie con símbolos las siguientes propiedades, para el producto y suma si corresponde.

a) Ley de cierre.
b) Asociativa.
c) Conmutativa.
d) Existencia del neutro.
e) Existencia del opuesto.
f) Existencia del inverso para todo elemento no nulo.
g) Propiedad distributiva

Ejercicios

1) Enunciar cada una de las propiedades anteriores simbólicamente.
2) Hallar el error en el siguiente cálculo:

$4+\frac{18}{3}=\frac{12}{3}+6$ pues $\frac{12+18}{3}=\frac{12+18}{3}$.

Entonces $4-\frac{12}{3}=6-\frac{18}{3}$ y luego $2(2-\frac{6}{3})=3(2-\frac{6}{3}) \Rightarrow 2=3$

Orden en Q

Dados $\frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} \in Q$, b > 0 y d > 0 se dice:

$\frac{a}{b}$ **es menor o igual que** $\frac{c}{d}$ y se anota $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ si y sólo si ad $\leq$ bc.

$\frac{a}{b}$ **es mayor o igual que** $\frac{c}{d}$ y se anota $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ si y sólo si ad $\geq$ bc.

Ejercicios

1) Ordenar de menor a mayor $\frac{-12}{6}, 3, \frac{2}{5}, -1, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{6}{4}$.

2) Sea - 4 < m < 2

a) Hallar m ε Z tal que se cumpla lo anterior.

b) Idem si m ε Q.

3) Probar que entre dos números racionales distintos, hay otro racional.

Importante: Esta propiedad muestra que siempre habrá un número racional entre dos, por muy próximos que estén. Por lo tanto se dice que el conjunto de los racionales es **denso**.

2.4 Números Irracionales: (I)

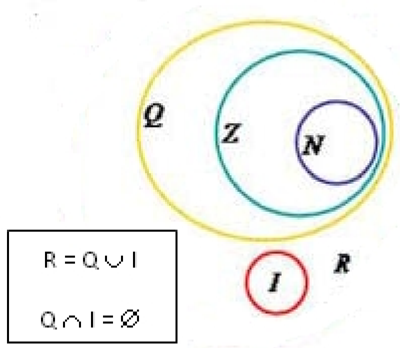
El concepto de números irracionales proviene de la Escuela Pitagórica, que descubrió la existencia de números irracionales, es decir que no eran enteros, ni racionales como fracciones. Es decir, si un número no es decimal exacto y no es decimal periódico, no representa a un número racional. Este tipo de números se llaman **irracionales**, o sea, son aquellos que **no** pueden expresarse como cociente de dos enteros $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$.
Es posible que este descubrimiento se produjera al intentar resolver el problema siguiente:

> Si se traza un cuadrado cuyo lado mida la unidad, es decir 1, y se intenta calcular lo que mide la diagonal utilizando el Teorema de Pitágoras. ¿Cuánto mide la diagonal?

Entre los más conocidos figuran: $\sqrt{p}\,(primo);\pi\ ;e$

2.5 Números Reales: (R)

Se llaman **números reales** aquellos números que son racionales o irracionales. Al conjunto de todos ellos lo notaremos con R.



El hecho de que los números reales son la unión de los racionales e irracionales nos indica que hemos completado la recta real sin dejar "agujeros". En la recta real se definen ciertos subconjuntos que se denominan intervalos. Definimos un **intervalo** entre dos números reales a y b al conjunto de todos los reales comprendidos entre a y b. Los números a y b se denominan extremos, y pueden o no pertenecer al intervalo. Veamos algunos ejemplos:

$(a,b) = \{x: a < x \wedge x < b\}$ intervalo abierto;
$(a,b] = \{x: a < x \wedge x \leq b\}$ intervalo semiabierto en a y cerrado en b;
$[a,b] = \{x: a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervalo cerrado;
$(-\infty,b) = \{x: x < b\}$ semirecta abierta en b;
$[a,\infty) = \{x: a \leq x \}$ semirecta cerrada en a.

Sobre R definimos dos operaciones: Suma (+) y Producto (.) de la manera usual y una relación < de orden.

- Analicemos las propiedades de cada una de ellas (guíese por lo discutido en los apartados anteriores).

<u>Ejercicios</u>

1) Dados a, b y c ε R. Probar:

a) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
b) $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow a\,c > b\,c$
c) $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow a\,c < b\,c$

2) Para todo a, b ε R con a > 0 y b > 0, a>b <=> a. a > b. b

2.5.1 Potencia de un número real y exponente entero

Cuando queremos indicar productos de factores iguales, generalmente usamos la notación exponencial. Recordemos que si a ε R y n ε N, n ≠ 0, entonces $a^n = a.\ a.\ a\ .....a$ n-veces, donde **a** es la base y **n** es el exponente.

Por convención si a ≠ 0,

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ya que $a^{-n}.a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$.

Y la regla de las potencias de igual base sigue siendo válida.

<u>Propiedad de las potencias</u>. La potencia es distributiva respecto al producto y al cociente.

Sean a, b ε R y n ε Z.

$$\boxed{\begin{array}{l}(a.b)^n = a^n.b^n \\ (a:b)^n = a^n : b^n\end{array}}$$

Resulta muy simple sistematizar el producto, cociente y potencia, de potencias de igual base.

$$\boxed{\begin{array}{l}a^n.a^m = a^{n+m} \\ a^n : a^m = a^{n-m} \text{ con } a \neq 0 \\ (a^n)^m = a^{n.m}\end{array}}$$

Luego ahora surge la siguiente pregunta, ¿la potencia es distributiva respecto de la suma?
La respuesta es NO, veamos un ejemplo:

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25$$
$$2^2 + 3^2 = 4+9 = 13$$

$$\boxed{\textit{Luego } (a+b)^n \neq a^n + b^n}$$

Ejercicios

1) En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar propiedades. Indicar dichos errores y corregirlos.

a) $(b^2 b^{-3} b^5)^2 = (b^4)^2 = b^{16}$ suponemos $b \neq 0$

b) $(a^2)^4 : (a^{-3})^2 = a^6 : a^{-6} = 1$ suponemos $a \neq 0$

c) $\dfrac{7^4.(7^2)^6}{(7^9)^2} = \dfrac{7^4.7^{12}}{7^{18}} = 7^{-2} = (-7)^2 = 49$

d) $(7-14)^0 + 5^0 = 1$

2) Aplicando las propiedades de la potencia, probar que:

a) $(10.2^{n+1})^3 : (2^{n+1})^3 = 1000$

b) $2^{2-n}.(2.2^{n+1} + 2^{n+2}) = 32$

3) Calcular:

a) $\dfrac{(1-\frac{3}{2}).(\frac{2}{3}-\frac{3}{4})^2}{(\frac{1}{3}-1):(\frac{2}{5}-2)^2} = ...$

b) $\left[\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-4} \div \left(\frac{1}{16}\right) + 11$

c) $\dfrac{0,27}{\left(\dfrac{16}{25-16}\right)^{-1/2}} - \sqrt{\dfrac{25}{16}} = ...$

d) $\dfrac{\sqrt{7}.7^5\sqrt{7^3}}{(7^2)^3} = ...$

4) Responder si es V ó F y justificar:

a) $\frac{1}{4} < a < 25 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 < a^2 < (25)^2$

b) $-3 < -a < \frac{-1}{3} \Rightarrow (-3)^2 < (-a)^2 < \left(\frac{-1}{3}\right)^2$

2.5.2 Radicación

Es la operación inversa de la potenciación.

DEFINICIÓN: Sean b ε R y n ε N, n >1, ∃ c tal que c^n=b y este número c es llamado la raíz n-ésima de b

$$\boxed{c^n = b \Leftrightarrow c = \sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos

$$\sqrt[3]{-64} = -4 \text{ pues } (-4)^3 = -64$$
$$\sqrt{36} = \pm 6 \text{ pues } (6)^2 = (-6)^2 = 36$$

Veamos ahora si existe alguna restricción para la radicación en R.

Supongamos que se desea calcular $\sqrt{-9}$ o sea buscar un número b ε R tal que $b = \sqrt{-9} \leftrightarrow b^2 = -9$ Tal número no existe pues b^2 es positivo.

En consecuencia, si se trabaja en R:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \text{ existe, si } a \in \Re \text{ y n es impar ó } a \geq 0 \text{ y n es par.}}$$

- Entonces, ¿es siempre posible simplificar una raíz?

Propiedades de la radicación

Dados $a, b \in \Re$ tales que existen $\sqrt[n]{a} y \sqrt[n]{b}$ se cumple:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}\end{array}}$$

Respecto de la suma y la resta

$$\boxed{\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}}$$

Para evitar la ambigüedad al simplificar, se debe tener en cuenta el **valor aritmético** de la raíz.

El valor aritmético de la raíz n-ésima de a^n es:

a si n es impar y $|a|$ si n es par

Raíz Aritmética:

Si n es impar $\sqrt[n]{a^n} = a$

Si n es par $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

En particular $\sqrt[2]{a^2} = |a|$

2.6 Racionalización de denominadores

En muchas cuestiones en que se presentan fracciones cuyo **denominador es una expresión irracional,** conviene transformarlas en otras equivalentes de denominador racional.
Esta racionalización se logra siempre, multiplicando numerador y denominador de la fracción por una expresión irracional conveniente.
Sin embargo, es tan complicada la fracción obtenida que sólo en casos muy sencillos tiene utilidad práctica.

Se racionaliza el denominador de toda expresión del tipo
En particular, si b ó c son 0, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$

$\dfrac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ ó bien $\dfrac{A}{\sqrt{a} \pm c}$ multiplicando los dos términos por la expresión conjugada

$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ ó bien $\sqrt{a} \mp c$ respectivamente

Ejercicio: Escriba fracciones equivalentes a las dadas, racionalizando los denominadores:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{5}}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}$

2.7 Ejercicios

1) Calcular:

a) $\sqrt{5}.\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}$

b) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{20}$

c) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}.\left(1+\sqrt[4]{81}\right)$

2) ¿Son correctas las igualdades?

a) $\sqrt{50}=5.\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12}=3.\sqrt{2}$

c) $\sqrt[5]{-64}=2.\sqrt[5]{-2}$

3) Hallar el error en las siguientes demostraciones:

a) $a\in\Re \Rightarrow a=-a$. Demostración:

$$a^2=(-a)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2} \Rightarrow a=-a$$

b) $b\in\Re \Rightarrow b=1$. Demostración:

$$b-1=-(1-b) \Rightarrow (b-1)^2=(1-b)^2 \Rightarrow b-1=1-b \Rightarrow$$
$$b+b-1=b+1-b \Rightarrow 2b-1=1 \Rightarrow 2b-1+1=1+1 \Rightarrow$$
$$2b=2 \Rightarrow b=1$$

4) Teniendo en cuenta la propiedad: $a,b\in\Re^+$ entonces $a\geq b \Leftrightarrow a^2\geq b^2$ (demostrarla) y ordenar:

a) $2.\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

5) Simbolizar y demostrar la proposición: “Si n es par entonces su cuadrado también”.

6) Demostrar que la intersección entre el conjunto de números pares e impares es vacío.

7) Sean a, b, c $\in$ Z, probar que si $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$ (propiedad transitiva de la divisibilidad).

8) Responder V ó F y justificar: Si $a,b \in \Re$

a) $(a.b)^2 = a^2.b^2$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

c) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

e) $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Supuestas definidas las raíces…(o sea, se puede realizar la operación en los reales)

f) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

g) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

CAPÍTULO 3: Polinomios y Ecuaciones

Este módulo tiene por objetivo que el alumno opere correctamente con polinomios, expresiones algebraicas y ecuaciones. A partir del módulo anterior, sea capaz de descomponer en forma factorial un polinomio.

3.1 Polinomios: Definición. Grado. Características.

Se llama **monomio** a una expresión de la forma

M(x) = ax^n donde a ∈ ℜ
x es una indeterminada
n es un número natural

Si a ≠ 0 , n <u>es el grado del monomio</u>. Si a = 0, el monomio no tiene grado.

Un **<u>polinomio</u>** es la suma de varios monomios y son expresiones de la forma

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0$, donde a_n ....., a_0 son números reales x es la indeterminada y n , n-1, ..., 1, 0 son números naturales.
Si $a_n \neq 0$ el grado de *P(x)* es *n*, y la notación que usamos es: *gr(P(x))=n*.

<u>Ejercicio</u>:

De acuerdo a la definición ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios?

a) $P(x) = 7x^4 + 5x + 2$

b) $Q(x) = \frac{5}{4}x^3 + (\ln 2)x + 3$

c) $S(x) = \frac{1}{3}x^{-6} + 3x^5 - x$

d) $T(x) = x^7 + 6x^5 + 4x^{\frac{3}{2}} - 1$

Así como los polinomios de un sólo término se llaman monomios, los de dos términos se llaman **binomios** y los de tres, **trinomios.**

<u>Grado y Característica de los polinomios</u>

El exponente del monomio de mayor grado de un polinomio nos indica el grado de ese polinomio.

<u>Ejemplo</u>: $P(x) = -4x^7 + 5x^4 + 3x - 1$ es un polinomio de grado 7

En particular $0(x) = 0x^n + ... + 0x + 0$, es decir, $0(x) = 0$ se llama **polinomio nulo** y no tiene grado.

Éstas son algunas características de los polinomios

a) El coeficiente del monomio de mayor grado es el coeficiente principal
b) Si el coeficiente principal es 1, el polinomio se llama mónico.
c) Al término a_0 se lo llama término independiente
d) Un polinomio está ordenado cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. En general ordenamos en forma decreciente.

3.2 Valor de un polinomio en un número

Sea $P(x)$ un polinomio y $a \in \Re$. Se llama **valor del polinomio** $P(x)$ **en a** al valor que toma $P(x)$ cuando x se reemplaza por a, o sea, $P(a)$

Ejemplo

Sea $P(x) = x^3 + 2x + 2$ y a = 1. Entonces: $P(1) = 1^3 + 2.1 + 2 = 5$

Ejercicios

Dados los siguientes polinomios, ordenarlos, indicar si son mónicos, escribir su coeficiente principal y su grado

a) $P(x) = -5x + 3x^5 - x^2 + 2x^4 - 9$
b) $Q(x) = 16x - x^4 - 2x^3 + x^6 + 1 + 14x^2$
c) $S(x) = 3x^7 - 2x^2 - x^9 + x^4 + 6x^5 - x^6$
d) $T(x) = 10x + \frac{1}{5}x^4 + x^2 - \sqrt{2}$
Luego hallar
$P(-2)$, $Q(2)$, $S(-1)$, $T(0)$

3.3 Operaciones con Polinomios

Cuando **se suman o se restan** dos polinomios el resultado es un polinomio
Sean P(x) y Q(x) dos polinomios, los coeficientes del resultado se obtienen sumando o restando los coeficientes respectivos de iguales potencias de la indeterminada en las expresiones de P(x) y Q(x).

Ejemplo

Sean $\begin{array}{l} P(x) = -3x^2 + 2x - 1 \\ Q(x) = x^3 + 3x - 2 \end{array}$

Hallar Q(x) + P(x)   y Q(x) – P(x)

Q(x) + P(x)

$$\begin{array}{rl} & x^3 + 0x^2 + 3x - 2 \\ + & \\ & -3x^2 + 2x - 1 \\ \hline & x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \end{array}$$

Q(x) – P(x)

$$\begin{array}{rl} & x^3 + 0x^2 + 3x - 2 \\ - & \\ & -3x^2 + 2x - 1 \\ \hline & x^3 + 3x^2 + x - 1 \end{array}$$

El resultado de la suma o la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o tiene grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

Polinomios iguales y opuestos

Si al sumar dos polinomios P(x) y Q(x) el resultado el polinomio nulo 0(x), entonces P(x) y Q(x) son polinomios **opuestos.**
Si al restarlos se obtiene 0(x), entonces son **iguales.**

Ejercicios

1) Sea $P(x) = 2x - 8x^3 + 5x^2$ y $Q(x) = -x^6 + x - 4x^2 - 2x^7 + 7x^3$
Hallar Q(x) + P(x) y Q(x) – P(x).

2) Sean $S(x) = 4x^3 - 2$, $T(x) = -4x^3 + x$, $W(x) = 6 - x$. Colocar el símbolo de <, =, >, según corresponda:

$gr[S(x)]\_\_\_gr[S(x) + T(x)]$

$gr[S(x)]\_\_\_gr[S(x) + T(x) + W(x)]$

$gr[S(x)] + gr[T(x)]\_\_\_gr[S(x) + T(x)]$

$gr[S(x)]\_\_\_gr[T(x)]$

$gr[W(x)]\_\_\_gr[S(x) + T(x)]$

3) Hallar el opuesto de $P(x) = -\left[x^3 + 8 - \left(-x^5 + 2x^4 \right) \right]$

4) Hallar P(x) en $2x^5 - 4x^4 - P(x) = x^3 + 2x^4 - 3$.

Producto de Polinomios

Cuando se **multiplican** dos polinomios, el resultado es un polinomio y su grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores, si ellos no son nulos

Para calcular el producto multiplicamos cada uno de los monomios de un polinomio por cada uno de los monomios del otro polinomio y sumamos.

Ejemplo: Sean $P(x) = x^2 + 2x + 1$, $Q(x) = x - 1$

$$P(x).Q(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(x - 1\right) = x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1 =$$
$$x^3 + x^2 - x - 1$$

Ejercicios

1) Dados $\begin{matrix} P(x) = 2x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 4 \\ Q(x) = 8 - 3x^2 - 5x \end{matrix}$ Hallar P(x) .Q(x)

2) Decidir si es Verdadero o Falso: “El grado del polinomio producto es siempre mayor que cada uno de los grados de los factores”. Justificar.

3) Hallar el grado, el coeficiente principal y el término independiente del polinomio $W(x) = P(x).Q(x)$, sabiendo que son ordenados y completos, que sus expresiones comienzan así y que sus coeficientes cumplen con la secuencia que se evidencia en sus primeros términos.

$$P(x) = x^{50} - x^{49} + x^{48} - x^{47} + x^{46} - x^{45} + ...$$
$$Q(x) = 2x^{23} + 4x^{22} + 8x^{21} + 16x^{20} + 32x^{19} + ...$$

4) Sea $S(x) = 2x^3 - x + 2$, $T(x) = x - 3$, $W(x) = -x^2 - x - 1$. Hallar:

a) $2\left[\left[S(x) + T(x)\right].W(x)\right]$

b) $\dfrac{1}{3}\left(T(x)\right)^2 - 4W(x).S(x)$

División de polinomios

Definición: Dados dos polinomios $D(x)$ y $d(x)$, con d(x) ≠ 0, existen y son únicos dos polinomios C(x) y r(x) tales que

D(x) = d(x).C(x) + r(x) con $gr[r(x)] < gr[d(x)]$ o $r(x) = 0(x)$

Al igual que para números, D(x) es el dividendo, d(x) es el polinomio divisor, C(x) es el cociente y r(x) es el polinomio resto.

Ejemplo: Sean $D(x) = 6x^3 - 17x^2 + 15x - 8$ y $d(x) = 3x - 4$

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 - 17x^2 + 15x - 8 & 3x - 4 \\
\cline{2-2}
\underline{-\ (6x^3 - 8x^2)} & 2x^2 - 3x + 1 \\
-9x^2 + 15x - 8 & \\
\underline{-\ (-9x^2 + 12x)} & \\
3x - 8 & \\
\underline{-\ (3x - 4)} & \\
-4 &
\end{array}
$$

Aquí $\begin{array}{l} C(x) = 2x^2 - 3x + 1 \\ r(x) = -4 \end{array}$ en cada paso vamos restando.

Podemos verificar, ya que $6x^3 - 17x^2 + 15x - 8 = (3x - 4).(2x^2 - 3x + 1) + (-4)$

Ejercicios

1) Sea $\begin{array}{l} P(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10 \\ Q(x) = 2x^2 + 3x \end{array}$ Hallar el cociente y el resto de P(x): Q(x)

2) ¿Existe un polinomio T(x) tal que $6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15 = T(x).(2x^2 - 3)$?

3) Hallar S(x) si es posible tal que $9x^5 + x^2 - 5x = (4x^2 - 5).S(x) + (x - 8)$

3.4 Raíces de un polinomio

Un valor de x es **raíz** de P(x), si y sólo si P(x) se anula en ese valor
En símbolos

x = a es raíz de P(x) ⇔ P(a) = 0

Ejemplo

x = 1 es raíz de $P(x) = x^5 - x^3$ pues $P(1) = 1^5 - 1^3 = 0$

3.5 Divisibilidad de polinomios

Si al realizar la división de P(x) y Q (x) el resto es nulo se dice que **P(x) es divisible por Q(x) o que Q(x) divide a P(x).**

En este caso será $\boxed{P(x) = Q(x) .C(x)}$

Si a es raíz de P(x) → el resto de la división entre P(x) y (x-a) es cero.
Es decir: P(a) = 0 → P(x) = (x-a) C(x)
O sea, un polinomio P(x) puede expresarse como producto de polinomios de la forma (x-a) siempre que a sea raíz de P(x).

Ejercicios:

1) Sean $P(x) = x^3 + 2x + 12$, $Q_1(x) = x - 2$, $Q_2(x) = x + 2$ Hallar el resto de las divisiones:

a) $P(x) : Q_1(x)$
b) $P(x) : Q_2(x)$

2) Calcular el valor de k tal que $Q(x) = x - 5$ divida a $P(x) = k.x^3 + x^2 - k$.

3) El polinomio $T(x) = -2x^2 + 3x + 14$ es divisible por S(x) = x – a.
Hallar los valores de a ε $\Re$ para que eso sea posible.

3.6 Factorización

Polinomios expresados como productos: Vamos a repasar algunas técnicas para expresar un polinomio como producto.

3.6.1 Factor Común

A veces sucede que en un polinomio P(x) la variable x figura en todos sus términos.
En estos casos es muy conveniente extraer factor común.
Observar que al extraer la variable x como factor común la extraemos elevada a la menor de sus potencias. También en algunos ejemplos se extrae un número que es factor en todos sus coeficientes.
Ejemplo

$$P(x) = 4x^5 + 8x^4 + 12x^2 = 4x^2(x^3 + 2x^2 + 3)$$

3.6.2 Diferencia de Cuadrados

Cuando se nos presenta la resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par, lo expresamos como diferencia de cuadrados.

Ejemplo

$$P(x) = x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5).(x-5)$$

3.6.3 Factor Común en Grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo

$$P(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) = x^4(7x - 5) + 2(7x - 5) = (x^4 + 2)(7x - 5)$$

A veces estas técnicas vienen asociadas. Veamos un ejemplo más:

$$Q(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1 = x^4(x^2 - 1) + (-1)(x^2 - 1) =$$

$$(x^4 - 1).(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 - 1) =$$

$$(x^2 + 1)(x+1)(x-1)(x+1)(x-1) = (x^2 + 1)(x+1)^2(x-1)^2$$

¿Qué casos de factorización se combinaron?

3.6.4 Trinomio Cuadrado Perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio al cuadrado, por ejemplo

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 6x + 9$ Si fuese x-3 se tendría

$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - 6x + 9$

Las expresiones difieren en el término 6x, en la primera es positivo y en la segunda negativo
Esto nos dice que para que un polinomio sea un trinomio cuadrado perfecto es necesario que sea de grado par y que tenga la estructura de:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \textbf{ó} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Ejercicios

Expresar los siguientes polinomios como producto usando la técnica que corresponda o más de una de ellas:

1) $P_1(x) = 2x^4 - x^3 + 6x^2$
2) $P_2(x) = x^6 - x^2$
3) $P_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
4) $P_4(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$
5) $P_5(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$
6) $P_6(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$
7) $P_7(x) = 4x^2 + 4x + 1$
8) $P_8(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}$

3.7 Polinomio Lineal y Ecuación Lineal

Un polinomio lineal es un polinomio de la forma

$$\boxed{L(x) = ax + b \text{ donde a , b } \varepsilon\ \Re,\ a \neq 0}$$

Si igualamos a cero este polinomio lineal en la variable x, obtenemos una **ecuación** de la forma:

$$L(x) = ax + b = 0 \ (*)$$

Esta igualdad significa la cuestión siguiente ¿Existe algún valor real de x, digamos α, tal que $L(\alpha) = 0$?Y en ese caso ¿Cómo se halla α?

Con esta aclaración se ve que (*) tiene el sentido de una igualdad numérica.
Ver que (*) es una **ecuación** (relación de igualdad entre cantidades algunas de ellas desconocidas, llamadas incógnitas) **de primer grado con una sola incógnita.**

Al valor α tal que L (α) = 0 se lo llama **raíz de la ecuación**

Una **solución** de una ecuación algebraica con una incógnita x es un valor α tal que al reemplazar x por α en la ecuación esta se transforma en una identidad numérica

Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución y en tal caso hallarlas.

Ejemplos

a) 3x – 9 = 0 tiene solución x = 3
b) 2x + 1= 2x, no tiene solución
c) (x – 1) = 5 tiene solución x = 6

Ejemplo

Sea la ecuación: 2x + 4 = 12
Resto 4 a ambos miembros: 2x + 4 – 4 = 12 – 4 entonces 2x = 8
Multiplico por 1/2 ambos miembros:
$\frac{1}{2} . 2x = \frac{1}{2} .8$, entonces $\underline{x = 4.}$

Para resolver la ecuación ax + b = 0 se deben utilizar operaciones elementales y las propiedades de los números reales.

Ejercicio: Resolver justificando cada paso

a) 10 -3x = x – 2
b) α - x = 3 (x - α)
c) $3(2 – x) + 1 = - x + \frac{5}{2}(1 –x) + \frac{x+3}{2}$
d) $\frac{1}{3} x – x = \frac{1}{4} x + 1$

3.8 Polinomio Cuadrático y Ecuación Cuadrática

Un **polinomio cuadrático** es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma

$$C(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{donde a, b y c números reales y } a \neq 0$$

Si igualamos a cero a C(x) se obtiene una **ecuación cuadrática** que en su forma general viene dada por

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La pregunta es ¿Cómo se pueden resolver este tipo de ecuaciones?

Actividad (Miramos de cerca las ecuaciones cuadráticas).

1. ¿Es verdad que si una ecuación **lineal** tiene coeficientes racionales, entonces su solución (si la tiene) también es un número racional?

2. ¿Lo anterior es cierto para las ecuaciones cuadráticas? Para verlo considere la ecuación cuadrática: $x^2 = 2$

3. Un tipo de ecuación cuadrática un poco más complicada que la anterior es la de la forma:

$$(x-k)^2 = \alpha$$

Resuelva las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta lo visto en radicación de números:

- $(x-2)^2 = 3$
- $(x-1)^2 = 0$
- $(x-7)^2 = -5$

4. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a.	$(x-3)^2 = \dfrac{1}{2}$	*b.*	$(1-x)^2 = \sqrt{2}$
c.	$(2x+1)^2 = 4$	*d.*	$(3-2x)^2 = 0$

<u>Completar el cuadrado</u>. Se trata de transformar una ecuación cuadrática cualquiera en una ecuación equivalente, pero cuyo aspecto sea el de las estudiadas en la actividad anterior.

Consideramos una ecuación cuadrática cualquiera, digamos: $a\,x^2 + bx + c = 0$.

Al mismo tiempo haremos un ejemplo con números:

<u>Paso 1</u>: *"limpiamos a x^2"*
Multiplicando por $1/a$ obtenemos la ecuación equivalente:

$$a\frac{x^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

<u>Paso 2</u>: *¿Quién es el doble producto?*
Reescribimos el coeficiente de x:

$$\frac{b}{a} = 2\frac{b}{2a}$$

La ecuación queda:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

<u>Paso 3</u>: *¿Hay un cuadrado ?*
Si recordamos el desarrollo,

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

podemos escribir nuestra ecuación como:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} =$$

$$= (x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Y pasando de miembro:

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

<u>Paso 4</u>: *Hago una cuentita*
Como tu habrás notado (?) nuestra ecuación cuadrática tiene la forma que estudiamos antes. Reformamos el segundo miembro sacando denominador común $4a^2$:

$$(x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Recordemos que una fracción es positiva cuando su numerador y su denominador tienen el mismo signo. En nuestro caso el denominador $4a^2$ es siempre positivo (¿por qué?). El miembro derecho será positivo solamente cuando $b^2 - 4ac > 0$.

En ese caso la ecuación que estamos estudiando tiene dos soluciones distintas, a saber:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} = 0$

Paso 1: multiplicamos por 2:

$$2.\frac{x^2}{2} + 2.2x - 2.\frac{3}{2} = 2.0$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

Paso 2: Escribimos el coeficiente de *x* como el doble de alguien (de su mitad):

$$x^2 + 2.(2x) - 3 = 0$$

Paso 3: Sumamos y restamos para obtener el cuadrado. Para ello, como

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Nuestra ecuación queda:

$$(x+2)^2 - 4 - 3 = 0$$

Y pasando de miembro:

$$(x+2)^2 - 7 = 0$$

$$(x+2)^2 = 7$$

Paso 4: Despejo

$$x + 2 = \pm\sqrt{7}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{7}$$

O bien: $x_1 = -2 + \sqrt{7}$
$x_2 = -2 - \sqrt{7}$

El número $\alpha = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. Su signo determina la existencia o no de soluciones. Resumamos lo que hemos visto en uno de esos cuadritos:

$$\boxed{\alpha = b^2 - 4ac}$$

$ax^2 + bx + c = 0$	SOLUCIONES	
$\alpha > 0$	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\alpha}}{2a}$	Dos soluciones distintas
$\alpha < 0$	**NO TIENE**	ninguna solución
$\alpha = 0$		solución única

Actividades:

1. Complete el cuadro siguiente:

Ecuación	a	b	c	discriminante $b^2 - 4ac$	condiciones	soluciones
$x^2 = \alpha$						
$(x - k)^2 = \alpha$						
$ax^2 + bx + c = 0$						

El propósito de este ejercicio no es que usted piense que hay varios tipos de ecuaciones de segundo grado, sino todo lo contrario.

2. La fórmula deducida en la sección anterior es completamente general, o sea que puede aplicarse a cualquier ecuación de segundo grado. Muchas veces la forma de la ecuación permite una solución más rápida y sencilla. Por ejemplo:

   - Si Ud. quiere resolver la ecuación: $x^2 - 2 = 0$, puede aplicar la fórmula, pero es algo similar a sacar el auto del garaje para ir al baño.

La ecuación se resuelve simplemente despejando:

$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

- Algo similar ocurre con todas las ecuaciones a las que les falta el término en *x*:

$$2x^2 - 3 = 0$$
$$2x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

- Las ecuaciones cuadráticas a las que les falta el término constante ("les falta *c*"), se resuelven sacando el factor común *ax*, por ejemplo:

$$-3x^2 + 4x = 0$$
$$-3x\,(x - \frac{4}{3}) = 0$$

Las soluciones de la ecuación anterior son $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{4}{3}$ ¿por qué?

<u>Ejercicios</u>:

1. Resuelva despejando la incógnita:

$a.$	$m^2 - 12 = 0$	$b.$	$x^2 + 25 = 0$
$c.$	$y^2 - 45 = 0$	$d.$	$4x^2 - 9 = 0$
$e.$	$(d-3)^2 = \frac{1}{2}$	$f.$	$(t+1)^2 = -9$

2. Resuelva sacando factor común:

$a.$	$12x^2 + x = 0$	$b.$	$9x^2 + 9x = 0$
$c.$	$7n^2 = -4n$	$d.$	$y^2 = 2y$

3. Considere la ecuación $14x^2 = 2x$. Vamos a resolverla de dos formas:

- Primera forma, sacando factor común:

$14x^2 = 2x$

$14x^2 - 2x = 0$

$14x(x - \frac{1}{7}) = 0$

$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{7}$

- Segunda forma:

  $14x^2 = 2x$

  divido por x $\qquad 14x = 2$

  por lo tanto: $\qquad x = \frac{1}{7}$

  Responda a las siguientes preguntas:

  a) ¿Cuáles es la solución correcta al problema?
  b) ¿Por qué Ud. considera correcta esa respuesta?
  c) ¿Por qué es incorrecta la otra respuesta?
  d) ¿Cuál fue el error que condujo a la respuesta incorrecta?

4. Utilice el discriminante para completar la siguiente tabla:

sólo indique cuántas hay

Ecuación	Discriminante	Soluciones
$\frac{x^2}{3} - 2x + 6 = 0$		
$2y^2 - 6y + 3 = 0$		
$2m^2 = 2m + 1$		
$\sqrt{3}x^2 + x + 2 = 0$		
$0.32z^2 - 0.75z - 0.66 = 0$		
$ax^2 + bx$		
$x^2 - (a + b)x + ab$		

5. Encuentre las soluciones de las ecuaciones de la tabla anterior.

3.9 Más sobre Ecuaciones

3.9.1 Ecuaciones de orden superior y ecuaciones fraccionarias

Como dijimos una ecuación es una igualdad y así como hay polinomios de grado superior, podemos encontrar ecuaciones de orden superior relacionadas con ellos. La resolución de ecuaciones de grado superior a dos son más difíciles de resolver, si bien existen fórmulas para la resolución de ecuaciones de grado 3 y 4, el matemático Galois demostró que no es posible hallar fórmulas para la resolución de la ecuación de grado mayor o igual a 5 (de ahí la importancia de saber factorizar).

Ejemplos:

$x^3 - 3x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x^2 - 3x + 1 = 0 (resolver)$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ por el cambio de variables y=x^2 $\Rightarrow$ $y^2 - 5y + 4 = 0 (resolver)$

Pero hay ecuaciones que no se relacionan con los polinomios, por ejemplo, ecuaciones del tipo:

$$\frac{4x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = -1$$

Esta ecuación no es polinómica, es fraccionaria ya que la incógnita aparece en el denominador. Es posible, operando de manera conveniente, transformarla en una ecuación no fraccionaria, y entre las soluciones estarán las soluciones de la ecuación original, pero CUIDADO pueden aparecer otras soluciones, resolvamos el ejemplo:

Si sumamos 1 a ambos miembros, mantenemos la igualdad:

$$\frac{4x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} + 1 = 0$$

Sumamos las fracciones utilizando el mínimo común múltiplo, para ello es importante usar los métodos de factorización (aquí usamos diferencia de cuadrados)

$$\frac{4x - 2(x + 1) + 1(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = 0$$

Y operando,

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = 0$$

Esta división se hace cero cuando $x^2 + 2x - 3 = 0$ y tiene como soluciones a x = 1 y x= -3, sin embargo a x = 1 debemos descartarla como solución ya que x = 1 y x = -1 no son solución ya que anulan al denominador … y no se puede dividir por cero!!!

Ejercicio: Resolver las siguientes ecuaciones (indicar los valor/es de x no permitidos).

1) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-2x}$

2) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=1$

3) $1+\frac{1}{x}=x(1-\frac{x+1}{x})$

4) $\frac{6}{x^2-9}=3$

5) $\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{x+1}$

6) $\frac{3x-3}{x^2-1}=2x$

3.9.2 Sistemas de Ecuaciones

Cuando uno trabaja con problemas aplicados, por lo general, tenemos varias cantidades desconocidas, y también varias condiciones que las verifican, es decir, que ya no tenemos una ecuación sino un sistema de ecuaciones. Veamos la manera de resolverlos por medio de un ejemplo.

Problema: "Hace dos años la edad del padre era cuatro veces la edad del hijo. Dentro de dos años, edad del hijo será la tercera parte de la edad del padre. Hallar las edades actuales."

Resolución: Identificar las incógnitas: p = edad del padre hoy y h = edad del hijo hoy.

Plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p-2=4(h-2) \\ h+2=\frac{1}{3}(p+2) \end{cases}$$

Existen distintos métodos de resolución, repasemos aquí el método de sumas y restas, que consiste en sumarle a una ecuación un múltiplo de la otra con la intención de eliminar una variable. Para esto debemos ordenar el sistema.

$$\begin{cases} p-4h=-6 \\ -\frac{1}{3}p+h=\frac{-4}{3} \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumando eliminamos p.

- Resolviéndolo (completar) llegamos a que h = 10, y luego, por la primera ecuación p = 34.

Solución: las edades actuales del padre y del hijo son 34 y 10 años respectivamente.

Pero, también hay sistemas de ecuaciones mixtos, puede que alguna ecuación no sea lineal. Nuevamente, resolvamos un ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

Repasemos otro de los métodos de resolución, el método de sustitución, que consiste en despejar una de las ecuaciones (aquí preferimos despejar la ecuación lineal) y la sustituimos en la otra ecuación. Despejando de la ecuación lineal y=x+1, quedándonos la primera ecuación:

$$x^2 + (x+1)^2 = 4$$

- Ecuación cuadrática que ya puede resolver (hacer) y luego que tenga las soluciones de x, recuerde reemplazar en la ecuación lineal, para obtener las soluciones de y.

3.10 Problemas de aplicación

Aquí van algunos consejos para intentar la resolución de un problema.

1. Leerlo con detenimiento, varias veces si fuera necesario, hasta que lo haya entendido. Trate de determinar qué se quiere encontrar y cuáles son los datos con los que se cuenta.
2. Haga un dibujo o diagrama que lo ayude a entender la situación.
3. Represente una de las cantidades a determinar con una letra (por ejemplo x). Trate de representar las otras cantidades en términos de x.
4. Plantear la o las ecuaciones que las relacionan las cantidades conocidas con las incógnitas.
5. Resolver la o las ecuaciones
6. Analizar si las soluciones obtenidas son solución del problema y verificar.

1. Resuelva los siguientes problemas.

a) Una modista desea cortar una cinta de 213 cm de longitud en tres tramos. Si cada tramo debe tener 2 cm más que el anterior, ¿cómo debe hacer los cortes?
b) Si el ángulo vértice de un triángulo isósceles mide 64°, hallar la medida de los otros ángulos del triángulo.

c) Una persona dispone de 28 m de cerca para construir un corral rectangular. Si se desea que el corral mida 6 m más de longitud que de ancho, calcular sus dimensiones.
d) Un cable que mide 60 cm se corta en 4 tramos, y cada tramo sucesivo tiene el doble de longitud que el anterior. Hallar la longitud del tramo más largo.
e) Un cartel en una mueblería dice "lleve los dos por \$655". Si una silla cuesta \$55 más que una banqueta, ¿cuánto cuesta la silla?
f) Si el ancho de una pileta de natación rectangular es la tercera parte de su longitud y se sabe que su perímetro es de 96m, determinar las dimensiones del natatorio.
g) Si uno de un par de ángulos suplementarios mide 35° más que el otro, cuántos grados mide el ángulo menor?

2. Encuentre dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 168.

3. La suma de un número y su recíproco es 10/3. Encuentre el número.
(Recíproco de a =1/a).

4. Encuentre la base y la altura de un triángulo cuya área es de 2 m^2 si su base es 3 m más larga que su altura. (Recordar: A=b.h/2).

5. Determina si las dos ecuaciones son equivalentes:

$x^2 = 16$ $\quad x = 4$

$x^2 = 25$ $\quad x = 5$

$x = \sqrt{9}$ $\quad x = 3$

$x = \sqrt{64}$ $\quad x = 8$

6. Resuelve la ecuación SIN USAR la fórmula de la ecuación cuadrática:

$25x^2 = 9$

$(x-3)^2 = 17$

$4(x+2)^2 = 11$

$x^2 = 361$

7. Determina los valores de d que completen el cuadrado en cada una de las siguientes expresiones:

$x^2 + 9x + d$

$x^2 + dx + 36$

$x^2 + 13x + d$

$x^2 - 8x + d$

$x^2 + dx + \frac{81}{4}$

8. Resolver completando cuadrados:

$x^2 + 6x + 7 = 0$

$x^2 - 8x + 11 = 0$

$4x^2 - 12x - 11 = 0$

$4x^2 + 20x + 13 = 0$

9. Resuelve con la fórmula cuadrática:

$5x^2 + 13x = 6$

$\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$

$\frac{5}{w^2} - \frac{10}{w} + 2 = 0$

$\frac{5x}{x^2 + 9} = -1$

$24x + 9 = -16x^2$

10. Despeja la variable especificada

$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad v \ (energía\, cinética)$

$A = 2\pi r(r + h) \quad r \ (área\, de\, un\, cilindro\, cerrado)$

$s = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \quad t \ (dist.\, de\, la\, caída\, de\, un\, objeto)$

11. a) Hallar el polinomio p(x), sabiendo que es divisible por q(x)= $2x^5 - 3x^2 - 2x - 1$, el cociente es c(x)= $2x^3 + 4x$ y el resto es r(x)=$-3x^2 + 6x + 1$.

b) Sabiendo que al dividir p(x)=$3x^3 - 6x^2 + 3x - 6$ por q(x) se obtiene como cociente c(x) = $3x - 6$ y como resto r(x)=$3x - 4$. Responde justificando tus respuestas: ¿Puede ser q(x) de grado 1? ¿Puede calcularse q(x) con estos datos? En tal caso, ¿Cuál es el polinomio q(x)?

12. Encuentra todos los valores de *k* tales que p(x) sea divisible por el polinomio lineal dado en cada caso:

$$p(x) = kx^3 + x^2 + k^2 x + 3k^2 + 11 \qquad x + 2$$

$$q(x) = k^2 x^3 - 4kx + 3 \qquad x - 1$$

13. Para cada una de las ecuaciones siguientes, encuentra, si es posible, las soluciones que sean reales y verifica.

$x^4 - 5x^2 + 4x = 0$

$x^3 - 3x^3 + x = 0$

$x(3x + 1)(5x - 6) = 0$

$6x^2(x - 1) = 2(x - 1)$

$x^2 - 4 = x^3 - 2x^2$

14. Simbolizar y demostrar la siguiente proposición: "si a y b son números reales distintos, entonces son raíces distintas de un polinomio lineal".

15. Encontrar todos los polinomios con coeficientes reales tales que verifiquen la ecuación:

$$(p(x))^2 = 2x(p(x) + 1) + 1$$