

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Curso de ingreso 2019

Facultad de Informática

**Dirección de Articulación
e Ingreso**
Secretaría Académica
FACULTAD DE INFORMÁTICA



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

CAPÍTULO 1: Lógica y Conjuntos

Este módulo tiene por objetivo el familiarizarse con los elementos básicos de la lógica simbólica; lo que permitirá establecer la validez de un enunciado complejo a partir de sus componentes. El álgebra proposicional abarca conceptos que son muy utilizados en la carrera que elegiste. Pretendemos que el alumno incorpore el bagaje lógico para que sea capaz de abordar el estudio de la teoría de conjuntos. La idea de conjunto no requiere demasiada presentación, el objetivo aquí es identificar los elementos que pertenecen y los que no a un conjunto. Interpretar correctamente la notación simbólica en la definición de conjuntos, y tratar de explicar a través de estos resultados la naturaleza del trabajo matemático.

1.1 Proposiciones

En el desarrollo de cualquier teoría matemática se hacen afirmaciones en forma de frases y que tienen un sentido pleno. Tales afirmaciones, verbales o escritas, las denominaremos enunciados o proposiciones.

Definición de Proposición: oración con valor declarativo o informativo, de la cual se puede predicar su verdad o falsedad.

Es decir,

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática. La proposición es el significado de una idea, enunciado, conjunto de palabras o letras

a las que se les puede asignar uno y sólo uno de los valores de verdad, que pueden ser:

VERDADERO (V) o FALSO (F)

Por lo general, a las proposiciones se las representa por las letras del alfabeto desde la letra p, es decir, p, q, r, s, t,... etc. Así, por ejemplo, podemos citar las siguientes proposiciones y su valor de verdad:

p: $15 + 5 = 21$ (F)

q: Santa Fe es una provincia Argentina. (V)

r: El número 15 es divisible por 3. (V)

s: El perro es un ave. (F)

Aclaremos que la mayor parte de las veces los enunciados adquieren el carácter de proposición en un contexto determinado; esto es, un enunciado puede ser una proposición en un sistema determinado, y no serlo en otro.

Para ser más claro: la oración “María va al teatro” no es una proposición, a menos que yo sepa a qué María (de los millones que existen) se refiere, y si “va al teatro” quiere decir que va habitualmente al teatro o que lo hace de vez en cuando o que está yendo al teatro en este instante determinado. Por otra parte si María es mi hermana, y en este momento está saliendo, la afirmación “María va al teatro” es una proposición, puesto que claramente es verdadera o falsa. Entonces, cuando digamos que cierto enunciado es una proposición tendremos en claro que lo es en un determinado contexto, en el cual es, sin lugar a dudas, verdadera o falsa.

Expresiones No Proposicionales

Son aquellos enunciados a los que no se les puede asignar un valor de verdad. Entre ellos tenemos a los exclamativos, interrogativos o imperativos.

Así tenemos, por ejemplo:

- ¿Cómo te llamas?
- Prohibido pasar.

- ¡Salí de ahí!

Clasificación de las Proposiciones

Aquellas proposiciones que constan o se las puede representar por una sola variable, se llaman proposiciones simples o atómicas. Por ejemplo, sea la proposición “ p : $3 + 6 = 9$ ” es una proposición simple o atómica.

Cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples, se le llama proposición compuesta o molecular. Así, por ejemplo:

$$\underbrace{\text{Pitágoras era griego}}_p \text{ y } \underbrace{\text{era geómetra}}_q$$

Encontramos dos enunciados. El primero (p) nos afirma que Pitágoras era griego y el segundo (q) que Pitágoras era geómetra.

No es necesario conocer si una afirmación es verdadera o falsa (es decir, su valor de verdad) para saber que es una proposición. Por ejemplo: “Hay vida extraterrestre” es una proposición, independientemente de que algunos creen que es verdadera y otros que es falsa, puesto que claramente o bien existe vida extraterrestre o bien no existe.

Nuestro sencillo estudio de las proposiciones no tratará de establecer el valor de verdad de una proposición dada, lo que muchas veces es tarea de los científicos (“el universo se originó en la gran explosión”), los filósofos (“pienso, por lo tanto existo”), o las novias y novios (“te quiero”).

Lo que haremos es analizar el valor de verdad de unas en función de los valores de verdad de las otras.

1.2 Conectivos Lógicos

A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir que se puede operar con proposiciones, y para ello se utilizan ciertos símbolos llamados conectivos lógicos. A continuación vemos una concreta definición

de cada uno:

1.2.1 Operaciones Proposicionales

Definiremos las operaciones entre proposiciones en el sentido siguiente: dada una o más proposiciones, de las que se conoce los valores de verdad, se trata de caracterizar la proposición resultante a través de su valor de verdad. A tal efecto, estudiaremos a continuación el uso y significado de los diferentes conectivos lógicos.

Negación

Dada una proposición p , se denomina la negación de p a otra proposición denotada por $\neg p$ (se lee no “ p ”) que le asigna el valor de verdad opuesto al de p . Por ejemplo:
 p : Diego estudia matemática.

$\neg p$: Diego no estudia matemática.

Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Observamos aquí que al valor V de p , la negación le hace corresponder el valor F, y viceversa.

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

Ejemplo: La negación de p : “Santa Fé es una provincia argentina” es:

$\neg p$: “Santa Fé no es una provincia argentina”.

Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q , se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición $p \wedge q$ (se lee “ p y q ”), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define esta operación, establece que la conjunción es verdadera sólo si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso es falsa.

Ejemplos: Sea la declaración:

$$\underbrace{5 \text{ es impar}}_p \text{ y } \underbrace{6 \text{ es par}}_q$$

Vemos que está compuesta de dos proposiciones a las que llamaremos p y q , que son:

p : 5 es un número impar

q : 6 es un número par

Por ser ambas verdaderas, la conjunción de ellas es verdadera.

Ahora bien, sea la declaración:

Hoy es el día 3 de noviembre y mañana es el día de 5 de noviembre.

Esta conjunción es falsa, ya que no pueden ser simultáneamente verdaderas ambas proposiciones.

Disyunción

Dadas dos proposiciones p y q , la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición compuesta $p \vee q$ (se lee “ p o q ”), cuya tabla de valor de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

“Marte es un planeta o una estrella”

“Córdoba es una provincia argentina o Uruguay es un país latinoamericano”

“El 3 es par o el 8 es primo”

Intente Ud. identificar las proposiciones p y q , y sus valores de verdad.

Condicional (o implicación)

Consideremos el enunciado: “Si apruebas Filosofía, te dejaré ir al viaje de fin de curso”. Este enunciado está formado por dos proposiciones atómicas:

p : “Apruebas Filosofía”

q : “Te dejaré ir al viaje de fin de curso”

Lo que nuestro enunciado original afirma es esto: si p es verdad, entonces q también es verdad, o, dicho de modo más sencillo, si p entonces q .

En el enunciado $p \rightarrow q$, se dice que p es el antecedente (o hipótesis) y q el consecuente (o conclusión).

El condicional $p \rightarrow q$ se lee “ p implica q .” o bien “si p entonces q ”.

Un condicional siempre es verdadero, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Por lo tanto, su valor de verdad queda definido por la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En las columnas p y q aparecen las cuatro posibles combinaciones de los valores de verdad para p y q , y en la columna $p \rightarrow q$ aparecen enumerados los valores de verdad de $p \rightarrow q$ para cada una de esas combinaciones. Por ejemplo, la segunda fila de la tabla nos dice que cuando p es verdadero y q falso, el enunciado $p \rightarrow q$ es falso. *Importante:* Es destacable que la implicación puede ser cierta aunque el consecuente sea falso. Así, si no apruebas Filosofía, pero yo no te permito ir al viaje de fin de curso, la implicación “Si apruebas Filosofía, te dejaré ir al viaje de fin de curso.”^{es} verdadera.

Otras denominaciones que representan también la proposición son:

- p sólo si q
- q si p
- p es condición suficiente para q
- q es condición necesaria para p

Ejemplos:

Ser divisible por 2 es condición necesaria para ser divisible por 6, pero no suficiente.

Ser divisible por 8 es condición suficiente para ser divisible por 4, pero no necesaria.

Analice y ejemplifique cada una de las 4 posibilidades.

El recíproco del implicador

Se puede ver por medio de las tablas de verdad, que tanto la conjunción como la disyunción tienen la **propiedad conmutativa**, es decir el orden de los enunciados

de las conjunciones o de las disyunciones no altera su valor de verdad: es lo mismo $p \wedge q$ que $q \wedge p$, y también es lo mismo $p \vee q$ que $q \vee p$. Pero, ¿ocurre lo mismo con el implicador? ¿Es lo mismo $p \rightarrow q$ que $q \rightarrow p$? La respuesta es que no. Veámoslo con cierto detenimiento.

Se dice que $q \rightarrow p$ es el recíproco de $p \rightarrow q$. El implicador no tiene la propiedad conmutativa y esto se aprecia en la comparación de las tablas de verdad de $p \rightarrow q$ y de su recíproco $q \rightarrow p$:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Veámoslo con un ejemplo:

Sea p el enunciado “Llueve”, y q : “El suelo está mojado”, siendo, por consiguiente $p \rightarrow q$ “Si llueve, entonces el suelo está mojado”. Veamos el recíproco de este enunciado: $q \rightarrow p$: “Si el suelo está mojado, entonces llueve”. Supongamos que p es verdadero, y q falso:

- $p \rightarrow q$ (“Si llueve, entonces el suelo está mojado”) es necesariamente falso.
- $q \rightarrow p$ (“Si el suelo está mojado, entonces llueve”) es verdadero, pues una falsedad implica cualquier cosa manteniendo la verdad del condicional.

El contrarrecíproco del implicador

Aunque un enunciado condicional y su recíproco no tienen los mismos valores de verdad, si los tienen el condicional y su contrarrecíproco.

El contrarrecíproco del enunciado $p \rightarrow q$ es $\neg q \rightarrow \neg p$ (es decir, la negación de cada uno de los enunciados del recíproco). Veámoslo comparando tablas de verdad:

p	q	p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Comparemos el mismo ejemplo: En el ejemplo anterior donde p : “Llueve”, q : “El suelo está mojado”, $p \rightarrow q$ “Si llueve, entonces el suelo está mojado”. El contrarrecíproco es $\neg q \rightarrow \neg p$, que significa que “Si el suelo no está mojado, entonces no llueve”, que es lógicamente equivalente al enunciado primitivo $p \rightarrow q$.

El bicondicional (o coimplicación)

Ya hemos comprobado que $p \rightarrow q$ no es lo mismo que $q \rightarrow p$. Puede ocurrir, sin embargo, que tanto $p \rightarrow q$ como $q \rightarrow p$ sean verdaderos. Por ejemplo, si p : “La Tierra es cúbica”, y q : “El Sol es un planeta”, entonces tanto $p \rightarrow q$ como $q \rightarrow p$ son verdaderos, porque tanto p como q son falsos. Es necesario tener esto en cuenta para entender bien el concepto de bicondicional. Mediante el bicondicional \leftrightarrow que queremos decir es que un enunciado es a la vez condición necesaria y suficiente para otro. El bicondicional o coimplicador $p \leftrightarrow q$, que se lee “ p si y sólo si q ”. Así, si digo que p : “apruebo Filosofía” q : “saco un 5 o más en el examen de Lógica” la fórmula $p \leftrightarrow q$ significa “apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el examen de Lógica”. Con este “si y sólo si” se quiere poner de manifiesto tres cosas:

- Al introducir el primer condicional “si” (en “si y sólo si”), introduzco el antecedente, y por tanto afirmo que $p \rightarrow q$, (es decir aprobaré Filosofía si saco 5 o más en el examen de Lógica), decir p si q es lo mismo que q entonces p .
- Al introducir “sólo si” (en “si y sólo si”), introduzco el consecuente, buscando comunicar que $q \rightarrow p$, (es decir, que si saco un 5 o más en el examen de Lógica, entonces apruebo Filosofía).
- Al utilizar el conectivo “y” (en “si y sólo si”), quiero comunicar la conjunción de $p \rightarrow q$ con $q \rightarrow p$.

Así pues, el enunciado “apruebo Filosofía si y sólo si sacó un 5 o más en el examen de Lógica” se puede formalizar de dos formas equivalentes: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, o bien $p \leftrightarrow q$. En consecuencia, el enunciado $p \leftrightarrow q$ queda definido por el enunciado $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Por esta razón, el símbolo \leftrightarrow se llama bicondicional, y la tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$ es la misma que la de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble flecha horizontal \leftrightarrow es el operador bicondicional. De la observación de la tabla de verdad deducimos que para que $p \leftrightarrow q$ sea verdadera, tanto p como q han de tener los mismos valores de verdad, y en caso contrario es falsa.

Formalización del bicondicional

El bicondicional puede tener varias expresiones equivalentes en lenguaje natural. Así $p \leftrightarrow q$ es la formalización de las siguientes expresiones de lenguaje natural:

- p si y sólo si q
- p es necesario y suficiente para q
- p es equivalente a q

Notar que $p \leftrightarrow q$ y $q \leftrightarrow p$ tendrían totalmente los mismos valores de verdad, puesto que ambas son coimplicaciones y por lo tanto si sus valores de verdad son los mismos, son verdaderas, y son falsas en los demás casos. En consecuencia, podemos reformular los enunciados anteriores intercambiando p y q .

Ejemplos del bicondicional

Ejemplos de bicondicionales verdaderos:

- a. “La Tierra es plana si y sólo si el Sol es un planeta”; si llamamos: p : “La Tierra es plana”, sabemos que es Falsa y sea q : “El Sol es un planeta”, también es Falsa.
- b. “La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es una estrella”, sea p : “La Tierra es esférica.”^{es} Verdadera, y sea q : “El Sol es una estrella”, también es Verdadera.

Ejemplos de bicondicionales falsos:

- a. “La Tierra es plana si y sólo si el Sol es una estrella”; si llamamos: p : “La Tierra es plana”, sabemos que es Falsa y sea q : “El Sol es una estrella”, es Verdadera.
- b. “La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es un planeta”, sea p : “La Tierra es esférica” es Verdadera, y sea q : “El Sol es un planeta”, en cambio, es Falsa.

1.2.2 Equivalencia Lógica

Decimos que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes. Si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad. Se indican como $P \Leftrightarrow Q$, siendo P y Q proposiciones no necesariamente atómicas.

Importante: usamos la \Leftrightarrow para indicar la equivalencia, mientras que \leftrightarrow simboliza al bicondicional.

Ejercicio: Probar que las siguientes propiedades se satisfacen, probando las equivalencias lógicas (construyendo las tablas de verdad).

- 1.- Doble negación: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- 2.- Leyes conmutativas: a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
- 3.- Leyes asociativas: a) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ b) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
- 4.- Leyes distributivas: a) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
- 5.- Leyes de De Morgan: a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- 6.- Implicación: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

1.2.3 Tautología

Es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es el contrarrecíproco, y verificamos por medio de la tabla de verdad que es una tautología, mirando el valor de verdad de la última columna:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

1.2.4 Contradicción

A diferencia de la tautología, que siempre es verdadera, aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, se denomina contradicción. Una de las más usadas y más sencilla es $p \wedge \neg p$, como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	q	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Ejemplo: Dada la proposición p : “La puerta es verde”. La proposición $p \wedge \neg p$ equivale a decir que “La puerta es verde y la puerta no es verde”.

Por otra parte, si una proposición compuesta cuyos resultados en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado V y F le llama **contingencia o contingente**.

Ejercicio: A partir de los enunciados, simbolícelos y obtenga conclusiones:

a) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.

Juan Nació en Mendoza.

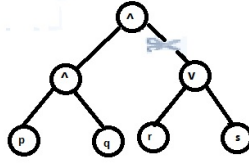


Figura 1: Árbol donde cortamos la rama r y s

b) Si Juan nació en Mendoza entonces es argentino.

Juan no es argentino.

A lo largo de los ejercicios y ejemplos, vimos que no siempre es necesario construir toda la tabla de verdad, en el siguiente ejercicio, vemos una manera práctica de encontrar el valor buscado, ahorrando tiempo.

Ejercicio: Obtener el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$, sabiendo que el valor de verdad de p es Falsa.

Resolución: Sabiendo que p es Falsa, la conjunción $(p \wedge q)$ también lo es, ya sea q V ó F. Luego, la siguiente conjunción $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$ también lo es, independientemente de los valores de las proposiciones r y s .

Esta es la forma en que una computadora generalmente resuelve este problema, generando un árbol de expresión como el de la figura 1 y se recorre evaluando las expresiones o proposiciones. Si podemos “cortar” una rama del árbol y no evaluarla, y de todos modos obtener el resultado nos ahorra tiempo de cálculo.

Realice la tabla de verdad, para convencerse de este hecho. Note que de esta manera tendrá que realizar una tabla con 16 filas.

1.3 Esquemas proposicionales en una indeterminada

En álgebra y Aritmética suele decirse que la siguiente expresión: $x + 2 = 5$ es una ecuación.

Tal expresión no es una proposición, pues no tiene sentido afirmar que sea verdadera o falsa, pero existe algún reemplazo de x por un número de modo tal que se transforma en una proposición.

Por ejemplo, si $x = 7$, $7 + 2 = 5$, es una proposición, la cual en este caso es Falsa.

Definición: Se llama esquema proposicional en la indeterminada x a toda expresión que contiene a x , y posee la siguiente propiedad: “Existe por lo menos un nombre tal que la expresión obtenida sustituyendo la indeterminada por dicho nombre, es una proposición”.

Convención: Llamaremos simplemente esquema en lugar de esquema proposicional. Las indeterminadas suelen llamarse variables o incógnitas.

Ejemplos

1. “ x es blanca” es esquema pues existe una constante “esta flor” que en lugar de la variable x produce la siguiente proposición: “Esta flor es blanca”.

Que esta proposición sea Verdadera o Falsa dependerá de cual sea la flor particular que se está eligiendo.

2. ¿Qué es x ? NO es un esquema, pues no hay constante que sustituida en la variable produzca una proposición.

Ejercicio: Si x es una indeterminada, decir cuáles de las siguientes expresiones son esquemas:

- 1) Juan y x fueron al teatro.
- 2) x es perro.
- 3) Distancia del punto P a x es igual a 2. (El punto P es conocido)
- 4) x doy.
- 5) $x \geq 0 \wedge x \leq 3$.

Vamos a utilizar símbolos tales como $P(x)$, $Q(x)$, para designar esquemas de incógnita x .

Definición: Si $P(x)$ es un esquema en x y a es una constante, se llama valor de $P(x)$ en la constante a a la expresión obtenida de $P(x)$ sustituyendo x por a .

El valor de $P(x)$ para a se designa $P(a)$.

Ejemplo: Sea $P(x) : x$ no es un objeto, y \mathbf{a} es “esta casa”. Reemplazmos: $P(\mathbf{a}) :$ “Esta casa no es un objeto”

Vamos a definir al conjunto de valores de verdad de P , lo simbolizamos con $V(P)$, al conjunto formado por todas las constantes a que hacen verdadera la proposición $P(\mathbf{a})$.

1.4 Cuantificadores: Universal y Existencial

Hasta ahora se ha visto un método para obtener proposiciones a partir de esquemas $P(x)$: sustituir la variable x por una constante adecuada a de tal forma que $P(\mathbf{a})$ sea una proposición.

Hay otro método distinto que transforma un esquema en proposición a partir del esquema $P(x)$: es el método de los operadores o cuantificadores.

Como vimos en los ejemplos, uno trata de reemplazar la incógnita por valores que tenga cierto sentido como para obtener una proposición, por ejemplo, si el esquema es $P(x) : x > 5$, pensamos que x puede ser un número, y dependiendo de si x es 8 ó x es 2, será verdadera o falsa; pero no pensamos en reemplazar x por algún color del arco iris. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición de Conjunto Universal: Llamaremos de esta forma al conjunto al

cual pertenecen los valores que puedan tomar las variables. Lo notaremos por U y lo nombraremos por conjunto universal o, simplemente, universo. Debe contener, al menos, un elemento.

Pero ahora podemos por medio de los cuantificadores convertir en proposiciones de la siguiente manera:

El cuantificador existencial,

“Para algún x se verifica $p(x)$ ”

“Existe x tal que se cumple $p(x)$ ”

“Para al menos un x se satisface $p(x)$ ”

son proposiciones que se escriben como “ $(\exists x)(p(x))$ ”

El cuantificador universal,

“Para todo x se verifica $p(x)$ ”

“Para cualquier x tal que se cumple $p(x)$ ”

“Para cada x se satisface $p(x)$ ”

son proposiciones que se escriben como “ $(\forall x)(p(x))$ ”

Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones y decide el valor de verdad de las mismas.

p : “Todo número real mayor que 2 tiene un cuadrado mayor que él mismo.”

q : “Algunos números reales con cuadrado mayor que 4 son menores que 2.”

r : “Cualquier número satisface $x^2 - x \geq 0$ o no es mayor que 2.”

Observa que en “ r ” hace falta el conjunto universal ...

¿Qué ocurre si U está formado por los números reales? ¿Y si a U lo forman los enteros?

Ejercicio: En cada caso decir si se trata de esquemas, en tal caso transformarlo

en una proposición y hallar su valor de verdad:

1. $P(n): n + 1 > n$.
2. $Q(n): n^2 + 1$.
3. $R(n): n^2 - 3n + 2 = 0$.
4. $S(n): n$ es un número racional.

Alcance de un operador

Sea el siguiente ejemplo:

$$(\exists x)x \text{ es verde} \wedge x \text{ es rojo} \quad (*)$$

Vemos que el operador existencial se refiere únicamente al esquema x es verde y NO a x es rojo, o sea que el alcance del operador llega únicamente al primer esquema, si quisiéramos que alcance a los dos esquemas, tendríamos que poner

$$(\exists x) : (x \text{ es verde} \wedge x \text{ es rojo})$$

o sea, usaríamos paréntesis.

Del ejemplo precedente podemos deducir que: La expresión “ x es verde” es el esquema más simple que aparece en $(*)$ inmediatamente después del operador.

La expresión “ x es verde \wedge x es rojo”, también es un esquema pero no es el más simple. La expresión “ x es rojo” es un esquema también simple pero no aparece después del operador.

Definición: Se llama **alcance de un operador en x** al esquema más simple que aparece inmediatamente después del operador, salvo que se presenten paréntesis, en cuyo caso deben aplicarse las reglas habituales referentes al uso de paréntesis.

Negación de operadores

Sea la siguiente proposición: $(\forall n)(n \text{ es un número primo})$, la cuál sabemos es Falsa.

Vamos ahora a negarla: $\neg(\forall n)(n \text{ es un número primo})$

En lenguaje corriente esto nos dice que no todos los números son primos que es lo mismo que si dijéramos: algunos números no son primos, y simbólicamente

$$(\exists n)(n \text{ no es un número primo})$$

De lo anterior se puede deducir:

$$\neg(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$$

De igual manera se obtiene:

$$\neg(\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$$

Por lo tanto, en palabras decimos que:

La negación de un cuantificador universal (existencial, respectivamente) es equivalente a la afirmación de un cuantificador existencial (universal) cuyo alcance es la negación del alcance del primero.

Ejercicio: Expresar en lenguaje corriente las siguientes proposiciones. Establecer el alcance de los operadores y proponer el Universo.

a) $(\forall x)(x \text{ es metal} \rightarrow x \text{ se funde})$

b) $(\forall x)(x \text{ es metal}) \vee \text{el oro se funde}$

c) $(\exists x)(x \text{ es cuadrado}) \rightarrow (\exists x)(x \text{ es paralelogramo})$

d) $\neg(\forall x)(x \text{ es hombre} \rightarrow x \text{ es mortal})$

1.5 Ejercicios

1.- Indicar cuáles de las siguientes frases son proposiciones:

a) Un cuadrado tiene 3 lados.

b) $x > 2$.

c) Hoy tardé más de una hora en llegar.

d) El mes de abril del 2019.

2.- Expresar las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas y retraducir su negación al lenguaje coloquial:

a) Juana no es justa pero mantiene el orden.

b) Los alumnos conocen a los simuladores y los desprecian.

c) Si los alumnos conocen a los simuladores, entonces los desprecian.

3.- Construir las tablas de verdad de:

a) $\neg(p \wedge q)$

b) $\neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

d) $\neg(p \vee q)$

e) $\neg q \wedge \neg r$

f) $(\neg s \wedge p) \vee (s \wedge \neg p)$

4.- Consideremos las siguientes proposiciones p, q, r, s .

p : La galera era un barco antiguo de comercio.

q : La galera era un barco antiguo de guerra.

r : La galera era un barco antiguo que se movía con velas.

s : La galera era un barco antiguo que se movía con remos.

Escribir con palabras los resultados de las siguientes operaciones:

a) $p \wedge q$

b) $\neg q \vee \neg r$

c) $\neg r \wedge s$

d) $q \vee s$

5.- Simbolizar las siguientes proposiciones:

a) Si $5 \geq 3$ entonces $5 - 3 \geq 0$.

b) Si A, B y C son números racionales tales que $2A+3B-5C = 0$ entonces $A=B=C=0$.

6.- a) Pasar a la forma si ... entonces ... y simbolizar:

i) Juan irá a Córdoba sólo si consigue pasaje en avión.

ii) Es necesario ser argentino para ser presidente de la república.

b) Expresar y simbolizar utilizando la palabra suficiente:

i) La temperatura bajará si comienza a soplar el viento del sur.

ii) Si aprobó el examen entonces contestó bien el 40 % de sus preguntas.

c) Expresar y simbolizar utilizando la palabra necesario:

i) Si un triángulo está inscripto en un semicírculo entonces es rectángulo.

ii) Pedro es argentino sólo si es americano.

7.- Establecer si las siguientes fórmulas constituyen tautologías, contradicciones o contingencias.

- a) $(p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$
- b) $(p \vee q) \rightarrow p$
- c) $(q \rightarrow p) \vee p$

8.- Encontrar proposiciones equivalentes usando las leyes de De Morgan y sustituciones adecuadas:

- a) $p \wedge \neg q$
- b) $\neg(\neg p \wedge q)$
- c) $(p \wedge q) \vee q$
- d) $((p \wedge q) \wedge ((q \wedge \neg p)$

9.- Determinar en cada caso si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Justifica tu respuesta, realiza de ser posible, el árbol.

- a) $(p \wedge q) \rightarrow r$, r es V.
- b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$, p es V y r es F.
- c) $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, q es V.

10.- Expresar mediante operadores y el símbolo de implicación, las proposiciones:

“Todos los hombres son mortales”

“Hay algún número que no es primo”

11.- Sean los esquemas $p(x) : x + 4 = 3$ y $q(x) : x^2 - 1 = 0$.

- a) ¿Existe un universo en el cuál la proposición $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ resulte verdadera? Justifique.
- b) Hallar un universo U en el cuál la proposición anterior sea falsa. Justifique.

12.- Simbolizar las siguientes proposiciones, usando proposiciones simples y/o esquemas proposicionales.

- a) Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito y el conjunto de los números naturales es infinito.
- b) Todo número distinto de cero es divisible por 1, -1, por el mismo y por su opuesto.
- c) 25 no es divisible por 2 ni por 3 pero es múltiplo de 5.

13.- Simbolizar utilizando esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos.

- a) Hay objetos rojos y además hay objetos verdes.
- b) Hay números pares o todos los números son múltiplos de 3.
- c) No todos los números son múltiplos de 5.
- d) Todos los números no son múltiplos de 5.

14.- Simbolizar utilizando cuantificadores y esquemas convenientes:

- a) Algunos hombres son santos.
- b) Ninguna virtud es una cualidad natural.
- c) No todo número real es un número racional.
- d) Todos los números primos son impares excepto el 2.
- e) Si existe un número natural menor que 4 entonces todo múltiplo de 6 es múltiplo de 5.

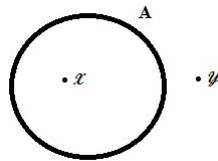
1.6 Teoría de Conjuntos

Un conjunto es la reunión de entes u objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que en general tienen características similares. Estos entes u objetos se llaman **elementos del conjunto**. Si a es un elemento del conjunto A se denota con la **relación de pertenencia** $a \in A$. En caso contrario, si a no es un elemento de A se denota $a \notin A$.

1.6.1 Formas de Expresar un Conjunto

- Diagrama de Venn

Seguramente esté familiarizado con gráficos como el siguiente, donde el elemento $x \in A$ y el elemento $y \notin A$.



- Expresado por Extensión

Cuando damos de manera explícita los elementos. Por ejemplo: $A = \{1, 3, 5, 7\}$

- Expresado por Comprensión

Cuando expresamos la propiedad que define el conjunto. En el ejemplo anterior, $A = \{x : x \text{ es un nro. impar menor o igual a } 7\} = \{x : x \text{ es impar} \wedge x \leq 7\}$

Se lee x tal que x es impar y x es menor o igual que 7.

Ejercicio: Considere $\{x : x > 1 \wedge 2.x = 1\}$ ¿Es un conjunto, qué elementos tiene?

Ejemplos de Conjuntos muy utilizados en matemática.

- Ya vimos en lógica, al conjunto universal o universo, que contiene a todos los elementos. Notado por la letra U .
- El conjunto vacío, es aquél que no contiene elementos. Se nota \emptyset ó sólo con $\{\}$.
- Conjuntos numéricos: números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, que desarrollaremos en el siguiente módulo.

1.6.2 Relaciones entre elementos y conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que:

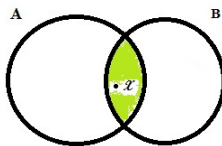
- A está contenido en B ó A es un subconjunto de B , si todo elemento de A es también un elemento de B . En símbolos $A \subset B$ si y sólo si se verifica el condicional $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$
- Los conjuntos A y B son iguales, si y sólo si tienen los mismos elementos. En símbolos $A = B$ si y sólo si se verifica el bicondicional $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Ejercicio: Como verá, hay una relación entre la contención y el condicional. ¿Cómo expresaría entonces la igualdad? Utilice su deducción para comparar los siguientes conjuntos: $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x(x - 3) = 0\}$ $C = \{x : x(x - 3)(x - 1) = 0\}$

1.6.3 Operaciones con Conjuntos

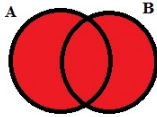
1.6.3.1 Intersección

Dados los conjuntos A y B , se define el conjunto $A \cap B$ que llamaremos intersección de A y B , como el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



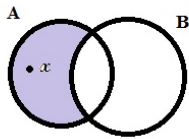
1.6.3.2 Unión

Dados los conjuntos A y B , se define el conjunto $A \cup B$ que llamaremos unión de A y B , como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



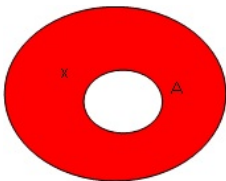
1.6.3.3 Diferencia

Dados los conjuntos A y B , se define el conjunto $A - B$ que llamaremos diferencia entre A y B (en ese orden), como el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B . $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



1.6.3.4 Complemento

Si $A \subset B$, se define el complemento de A con respecto a B como el conjunto formado por los elementos de B que no pertenecen a A . $C_B A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$
 En particular, si $B=U$, decimos directamente el complemento de A , sin necesidad de



aclarar respecto a quién. En general, usaremos $B = U$ y simplificamos la notación usando: A^C .

Ejercicios

1. Escriba por extensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{x : x \text{ es una letra de la palabra Facultad}\} \quad B = \{x : x \text{ una cifra del nro. } 3,502,332\}$$

$$C = \{x : x \text{ es un diptongo de la palabra volumen}\}$$

2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$, $C = \{2, 4\}$, calcule los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $C_B C$, $B - A$, $A \cap B \cap C$, $A - (B - C)$, $(A - B) - C$, $B - C$. Compare los resultados y obtenga conclusiones posibles.

3. ¿Cuál es la intersección entre los conjuntos $\{\{a\}\}$ y $\{a\}$?

4. Complete las proposiciones siguientes con los símbolos \in o \notin :

2 $\{1, 3, 5, 7\}$, 5 $\{2, 4, 5, 6\}$, 2 $\{4, 5, 6, 7\}$, 0 \emptyset , 1 $\{1, 2\} - \{1, 6\}$,
 París $\{x: x \text{ es el nombre de un país}\}$, 2 $\{1, 2\} - \{1, 6\}$, 2 $\{1, 2\} \cap \{1, 6\}$,
 Jujuy $\{x: x \text{ es provincia Argentina}\}$, 2 $\{1, 2\} \cup \{1, 6\}$, a $\{\{a\}\}$, $\{a\}$ $\{\{a\}\}$

5. ¿Cómo puede traducir las leyes de De Morgan con la notación de conjuntos?

6. Sean A y B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subset B$. Determinar si son V ó F los siguientes enunciados, justificando la respuesta:

- Siempre $\exists x$ tal que $x \in A \wedge x \notin B$
- Siempre $\exists x$ tal que $x \in B \wedge x \notin A$
- $x \notin B \rightarrow x \notin A$
- $x \notin A \rightarrow x \notin B$
- A y B no tienen elementos en común (¿cómo simbolizaría esta proposición, según la notación de conjuntos?).

7. Sean A , B y C conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset C$. Sabiendo que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ y $f \notin C$, ¿cuáles de las siguientes informaciones son ciertas?

$$\begin{array}{lll}
a \in C & b \notin A & b \in A \\
c \notin A & e \notin A & f \notin A \\
d \in B & f \in C_C C & c \in C - B \\
a \in C \cap B & b \in C_B A & d \notin A \cap C
\end{array}$$

1.6.4. Relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Como habrán notado, existe una relación muy estrecha entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional.

Para mostrar dicha relación, podemos completar el siguiente cuadro:

Conjuntos	$A \cap B$			$C_U A$		$A - B$
Proposiciones		$a \vee b$	$a \rightarrow b$		$a \leftrightarrow b$	

Además, el conjunto vacío se corresponde con una *contradicción* y el conjunto universal con una *tautología*.

Mediante esta correspondencia, todos los resultados sobre conjuntos se pueden reescribir en términos de lógica proposicional y viceversa.

Ejercicio: por medio de esta relación, escribir en términos de lógica las siguientes propiedades.

1. Idempotencia: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. Absorción: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
3. Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Complementariedad $A \cup C_U A = U$; $A \cap C_U A = \emptyset$
5. $C_U(C_U A) = A$

CAPÍTULO 2: Conjuntos Numéricos

Este módulo tiene por objetivo recordar y clarificar las propiedades de las operaciones en los conjuntos numéricos que se consideran imprescindibles para seguir adelante. Al finalizar el mismo el alumno debe ser capaz de:

- a) Identificar los distintos tipos de números
- b) Aplicar correctamente las propiedades de las operaciones.

2.1 Números Naturales: (\mathbb{N})

Este conjunto de números existe desde que el hombre tuvo la necesidad de contar, por ejemplo, su ganado. Es el primer conjunto de números que aprendemos, posee infinitos elementos y aparece como su nombre lo indica en forma natural. Este conjunto, simbolizado con la letra \mathbb{N} , tiene como elementos:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ y así continúa indefinidamente.

Consideremos las dos operaciones fundamentales en \mathbb{N} , suma y producto, y veamos sus propiedades:

- 1) La suma de dos números naturales es un número natural.
- 2) El 0 es tal que sumado con cualquier otro número no lo modifica.
- 3) Si se consideran 3 números naturales la suma de los dos primeros más el tercero resulta igual que si al primero se le suma el resultado de la suma de los otros dos.
- 4) La suma de números naturales es conmutativa.

Ejercicios

- 1) Expresar simbólicamente las 4 propiedades anteriormente enunciadas.
- 2) Enunciar las propiedades del producto de números naturales, en lenguaje corriente y simbólicamente.
- 3) ¿Cuál es la propiedad que enlaza la suma y el producto de naturales? Definirla.

Orden Usual

Con los naturales también se pueden expresar ordenamientos, por ejemplo: se ordenan los planetas a partir del sol, la Tierra es el tercero y Marte es el cuarto.

Además dadas dos colecciones de objetos se pueden comparar sus cantidades: “La tierra tiene menos satélites que Júpiter”

Surgen las siguientes preguntas: ¿ \mathbb{N} tiene primer elemento?, ¿cuál es?, ¿tiene último elemento?

Dados a y $b \in \mathbb{N}$ se cumple: $a < b \vee a > b \vee a = b$.

2.2 Números Enteros: (\mathbb{Z})

En \mathbb{N} , la resta sólo está definida si el minuendo es mayor o igual al sustraendo. Para que dicha operación no sea tan restringida se creó el conjunto de enteros negativos (notado por $-\mathbb{N}$). Para ello para cada $n \in \mathbb{N}$ se introduce el opuesto de n , notado $-n$ tal que

$$n + (-n) = 0 \text{ Entonces } \mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$$

Los números negativos se consideran menores que 0 en el orden usual de los enteros. A los naturales se los llama enteros positivos, siendo mayores o iguales que 0.

Ley de Monotonía

Si a, b y $c \in \mathbf{Z} \wedge a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$

Ejercicio:

Ejemplificar la Ley de Monotonía con distintas combinaciones en los signos (es decir enteros positivos y negativos) de a, b y c .

Números Pares e Impares

Dentro del conjunto de los enteros se distinguen dos subconjuntos cuya unión componen a \mathbf{Z} , ellos son el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares.

Definición: Un número entero n es **par** si y sólo si existe un entero k tal que $n = 2k$.

Definición: Un número entero n es **impar** si y sólo si es el siguiente de un número par. Por lo tanto, si n es impar se cumple que $n = 2k + 1$, con $k \in \mathbf{Z}$.

Divisibilidad

En muchos problemas es necesario saber si el reparto de varios elementos en diferentes grupos se puede hacer equitativamente, es decir, si el número de elementos dividido entre el número de grupos sería una división entera con resto o sin resto. Al dividir un número $n \in \mathbf{Z}$ entre otro número $d \in \mathbf{Z}$, la división sea exacta sin resto, diremos que n es **múltiplo** de d , que n es **divisible** por d , que d es **divisor** de n , o que d **divide** a n .

En este caso, existe un tercer entero (cociente) c , tal que $n = c.d$. En general, aplicamos la divisibilidad a números enteros, pudiendo ser positivos o negativos.

En símbolos: Sean $n, d \in \mathbf{Z}$, decimos que d divide a n si $\exists c \in \mathbf{Z}$ tal que $n = c.d$. Se nota $d|n$.

Otro concepto importante en la teoría de Números Enteros es el de número primo.

Definición: : Un número entero se dice **primo** si tiene exactamente 4 divisores:

la unidad, el propio número y sus respectivos opuestos.

Ejercicios

- 1) Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hallar los elementos primos de A . Justificar.
- 2) Si un número es primo, ¿qué se puede decir de su opuesto?
- 3) Hallar la descomposición en primos de los números 340 y 195.
- 4) Demostrar que la intersección entre el conjunto de números pares e impares es vacío.
- 5) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, probar que si $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$ (propiedad transitiva de la divisibilidad).

2.3 Números Racionales: (\mathbb{Q})

La operación de dividir no es siempre posible en el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros.

Veamos: puede efectuarse $12:4$ pues existe un entero, el 3, tal que $4 \cdot 3 = 12$. Pero, no ocurre lo mismo con $4:12$ ó $3:7$, por lo tanto esta imposibilidad nos conduce a ampliar a \mathbb{Z} definiendo un conjunto en el que la división sea realizable en dicho conjunto.

Vamos a definir ahora formalmente este nuevo conjunto que se denomina conjunto de los números racionales y se simboliza con la letra \mathbb{Q} .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \right\}$$

Los números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse y el resultado es un número racional.

En \mathbb{Q} se definen la suma y el producto de forma que las propiedades de estas operaciones se conservan:

Dados $\frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ se define la suma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b \cdot d}$

y el producto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Se dice que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si y sólo si $a.d = b.c$.

Ejemplos

$\frac{9}{-3}$ es equivalente a -3 .

$\frac{3}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{-6}{-24}$ son equivalentes.

Una operación entre racionales no se modifica si reemplazamos uno de ellos por otro que sea equivalente.

Ejercicio: Enuncie en palabras y con símbolos las siguientes propiedades, para el producto y suma si corresponde.

a) Ley de cierre. b) Asociativa. c) Conmutativa. d) Existencia del neutro. e) Existencia del opuesto. f) Existencia del inverso para todo elemento no nulo. g) Propiedad distributiva

Ejercicios: Hallar el error en el siguiente cálculo:

$4 + \frac{18}{3} = \frac{12}{3} + 6$ pues $\frac{12+18}{3} = \frac{12+18}{3}$, por la definición de suma en \mathbb{Q} . Entonces $4 - \frac{12}{3} = 6 - \frac{18}{3}$ y luego, $2(2 - \frac{6}{3}) = 3(2 - \frac{6}{3})$. Así resulta $2 = 3$.

Orden en \mathbb{Q}

Dados $\frac{a}{b} \wedge \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $b \wedge d > 0$ se dice:

$\frac{a}{b}$ es menor o igual que $\frac{c}{d}$ y se anota $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ si y sólo si $a.d \leq b.c$. De manera análoga, se define el mayor o igual (queda para el lector escribirla).

Ejercicios

1) Ordenar de menor a mayor $\frac{-12}{6}$, 3 , $\frac{2}{5}$, -1 , $\frac{-3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{4}$. 2) Sea $-4 < m < 2$

a) Hallar $m \in \mathbb{Z}$ tal que se cumpla lo anterior. b) Idem si $m \in \mathbb{Q}$.

3) Probar que entre dos números racionales distintos, hay otro racional.

Importante: Esta propiedad muestra que siempre habrá un número racional entre dos, por muy próximos que estén. Por lo tanto se dice que el conjunto de los

racionales es **denso**.

2.4 Números Irracionales: (I)

El concepto de números irracionales proviene de la Escuela Pitagórica, que descubrió la existencia de números irracionales, es decir que no eran enteros, ni racionales como fracciones. Es decir, si un número no es decimal exacto y no es decimal periódico, no representa a un número racional. Este tipo de números se llaman irracionales, o sea, son aquellos que **no** pueden expresarse como cociente de dos enteros $\frac{m}{n}$ con $n \neq 0$.

Es posible que este descubrimiento se produjera al intentar resolver el problema siguiente:

Si se traza un cuadrado cuyo lado mida la unidad, es decir 1, y se intenta calcular lo que mide la diagonal utilizando el Teorema de Pitágoras. ¿Cuánto mide la diagonal?

Entre los más conocidos figuran: π , \sqrt{p} (con p primo), e .

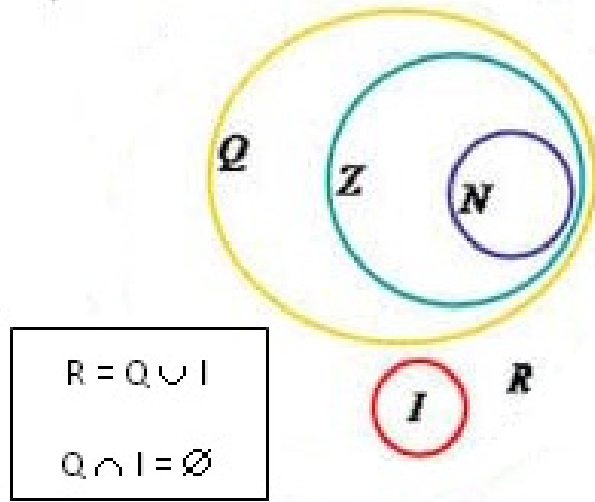
2.5 Números Reales: (R)

Se llaman números reales aquellos números que son racionales o irracionales. Al conjunto de todos ellos lo notaremos con \mathbb{R} .

El hecho de que los números reales son la unión de los racionales e irracionales nos indica que hemos completado la recta real sin dejar “agujeros”. En la recta real se definen ciertos subconjuntos que se denominan **intervalos**. Definimos un intervalo entre dos números reales a y b al conjunto de todos los reales comprendidos entre a y b . Los números a y b se denominan extremos del intervalo, y pueden o no pertenecer al mismo. Veamos algunos ejemplos:

$(a, b) = \{x : a < x \wedge x < b\}$ intervalo abierto;

$[a, b] = \{x : a < x \wedge x \leq b\}$ intervalo semiabierto en a y cerrado en b ;



$[a, b] = \{x : a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervalo cerrado;
 $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$ semirecta abierta en b ;
 $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$ semirecta cerrada en a .

Sobre \mathbf{R} definimos dos operaciones: Suma (+) y Producto (.) de la manera usual y una relación \leq de orden.

Analicemos las propiedades de cada una de ellas (guíese por lo discutido en los apartados anteriores).

Ejercicios

1) Dados $a, b \wedge c \in \mathbf{R}$. Probar:

a) $a > b \rightarrow a + c > b + c$ b) $a > b \wedge c > 0 \rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ c) $a > b \wedge c < 0 \rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

2) Para todo $a, b \in \mathbf{R}$ con $a, b > 0$, $a > b \leftrightarrow a \cdot a > b \cdot b$

3) Analizar la validez de la siguiente afirmación: “Si $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$ ”.

¿Vale la recíproca?

2.5.1 Potencia de un número real y exponente entero

Cuando queremos indicar productos de factores iguales, generalmente usamos la notación exponencial. Recordemos que si $a \in \mathbf{R}$ y $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$, entonces

$a.n = a.a.a.....a$ n -veces, donde a es la base y n es el exponente.

Por convención si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ya que $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$.

Y la regla de las potencias de igual base sigue siendo válida.

Propiedad de las potencias: La potencia es distributiva respecto al producto y al cociente.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Resulta muy simple sistematizar el producto, cociente y potencia, de potencias de igual base.

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

Luego ahora surge la siguiente pregunta, ¿la potencia es distributiva respecto de la suma?

La respuesta es **NO**, veamos un ejemplo:

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

en cambio, $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

sabemos que $25 \neq 13$ entonces: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

Ejercicios

1) En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar propiedades. Indicar dichos errores y corregirlos.

a) $(b^2.b^{-3}.b^5)^2 = (b^4)^2 = b^8$ suponemos $b \neq 0$

b) $\frac{(a^2)^4}{(a^{-3})^2} = \frac{a^8}{a^{-6}} = a^{14}$ suponemos $a \neq 0$

$$c) \frac{7^4 \cdot (7^2)^6}{(7^9)^2} = \frac{7^4 \cdot 7^{12}}{7^{18}} = 7^{-2} = 49$$

$$d) (7 - 14)^0 + 5^0 = 1$$

2) Aplicando las propiedades de la potencia, probar que:

$$a) \frac{(10 \cdot 2^{n+1})^3}{(2^{n+1})^3} = 1000$$

$$b) 2^{2-m} \cdot (2 \cdot 2^{m+1} + 2^{m+2}) = 32$$

3) Calcular:

$$a) \frac{(1 - \frac{3}{2}) \cdot (\frac{2}{3} - \frac{3}{2})^2}{(\frac{1}{3} - 1) \cdot (\frac{2}{5} - 2)^2} =$$

$$b) \left[\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \right]^{-4} \cdot \frac{1}{16} + 11 =$$

$$c) \frac{0,27}{\left(\frac{16}{25-16}\right)^{-1/2}} - \sqrt{\frac{25}{16}} =$$

$$d) \frac{\sqrt{7} \cdot 7^5 \cdot \sqrt{7^3}}{(7^2)^3} =$$

4) Responder si es V ó F y justificar:

$$a) \frac{1}{4} < a < 25 \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 < a^2 < 25^2$$

$$b) -3 < -a < \frac{-1}{3} \rightarrow (-3)^2 < (-a)^2 < \left(\frac{-1}{3}\right)^2$$

2.5.2 Radicación

Es la operación inversa de la potenciación.

Definición: Sean $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\exists c$ tal que $c \cdot n = b$ y este número c es llamado la raíz n -ésima de b

$$c^n = b \leftrightarrow c = \sqrt[n]{b}$$

Ejemplos: $\sqrt[3]{-64} = -4$ pues $(-4)^3 = -64$

$\sqrt{36} = 6$ pues $6^2 = 36$ pero también $\sqrt{36} = -6$ pues $(-6)^2 = 36$.

Convenimos que en un ejercicio (no en la respuesta de un problema) si vemos escrito $\sqrt{36}$ consideramos la solución positiva.

Veamos ahora si existe alguna restricción para la radicación en \mathbb{R} .

Supongamos que se desea calcular $\sqrt{-9}$, o sea buscar un número $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sqrt{-9} \leftrightarrow b^2 = -9$. Y tal número no existe pues b^2 es positivo siempre.

En consecuencia, si se trabaja en \mathbb{R} :

$\sqrt[n]{a}$ existe, si $a \in \mathbb{R}$ y n es impar ó $a \geq 0$ y n es par

Entonces, ¿es siempre posible simplificar una raíz?

Propiedades de la radicación:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que existen $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ se cumple:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\end{aligned}$$

Respecto de la suma y la resta: $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

Reiteramos, para evitar la ambigüedad al simplificar, se debe tener en cuenta el valor aritmético de la raíz. El **valor aritmético** de la raíz n -ésima de a^n es:

$$\begin{cases} a, & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a|, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Raíz Aritmética:

Si n es impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$

Si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

En particular, $\sqrt{a^2} = |a|$, como vimos en el ejemplo anterior, donde $a = 36$.

2.6 Racionalización de denominadores

En muchas cuestiones en que se presentan fracciones cuyo *denominador es una expresión irracional*, conviene transformarlas en otras equivalentes de denominador racional.

Esta racionalización se logra siempre, multiplicando numerador y denominador de la fracción por una expresión irracional conveniente. Sin embargo, es tan complicada la fracción obtenida que sólo en casos muy sencillos tiene utilidad práctica.

Se racionaliza el denominador de toda expresión del tipo:

$$\frac{k}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \text{ ó bien } \frac{k}{\sqrt{a} \pm c}$$

multiplicando los dos términos por la expresión conjugada:

$$\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \text{ ó bien } \sqrt{a} \mp c, \text{ respectivamente.}$$

En particular, si b ó c son 0, se multiplica el numerador y el denominador por \sqrt{a} .

2.7 Ejercicios

1) Calcular:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$

b) $(1 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{20} =$

c) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} \cdot (1 + \sqrt[4]{81}) =$

2) Escriba fracciones equivalentes a las dadas, racionalizando los denominadores:

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}$

3) ¿Son correctas las igualdades?

a) $\sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} = 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt[5]{64} = 2\sqrt[5]{-2}$

4) Hallar el error en las siguientes demostraciones:

a) $a \in \mathbb{R} \rightarrow a = -a$. Demostración: $a^2 = (-a)^2 \rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} \rightarrow a = -a$

b) $a \in \mathbb{R} \rightarrow a = 1$. Demostración: $a - 1 = -(1 - a) \rightarrow (a - 1)^2 = (1 - a)^2$

$\rightarrow a - 1 = 1 - a \rightarrow a + a - 1 = a + 1 - a \rightarrow 2a - 1 = 2 \rightarrow a = 1$.

5) Teniendo en cuenta la propiedad: $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a > b \leftrightarrow a^2 > b^2$, analizar su validez, ordenando:

a) $2\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{6}}$

6) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, probar (utilizando la definición) que si $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$ (propiedad transitiva de la divisibilidad).

7) Responder V ó F y justificar: Si

a) $(a.b)^2 = a^2.b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

c) $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ con $b \neq 0$

d) $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

e) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Para los siguientes incisos, vamos a suponer que están definidas las raíces, es decir, se pueden realizar las operaciones en los reales.

f) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

g) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

CAPÍTULO 3: Expresiones Algebraicas.

Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Mixtos

Este módulo tiene por objetivo el familiarizarse con el lenguaje algebraico, que nos permite de manera simple, hallar relaciones, propiedades y resolver problemas.

3.1 Expresiones Algebraicas

Una **expresión algebraica** es cualquier combinación de números representados por letras o por letras y cifras vinculados entre sí por operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación. Ejemplos de expresiones algebraicas son: $3a + \frac{b}{2}$, $2x^2 + 3x + 5$, $\sqrt{ax^2} - \frac{\pi}{x+6}$, $3xy + y$.

Las expresiones algebraicas deben operarse convenientemente con el fin de convertirlas en expresiones equivalentes más sencillas. Una diferencia entre el álgebra y la aritmética, reside en que en esta última trabajamos con operaciones entre números y obtenemos otro número, como vimos en parte del capítulo 2, por ejemplo, $(7 - 14)^0 + 5^0 = 1$. En cambio en expresiones algebraicas, como ser $(b^4)^2 = b^{16}$ del mismo ejercicio del capítulo 2, nos dá como resultado una familia de soluciones que dependen del valor de b .

Ejercicios

1. Identifique y liste las expresiones algebraicas que vea en los ejercicios del capítulo 2.

2. Indique expresiones algebraicas equivalentes con (justifique):

a) $\frac{2x}{2+x}$ (i) $\frac{x}{1+x}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{2x}{2+x}$

b) x^2x^n (i) x^{2-n} (ii) x^{2+n} (iii) $(x^2)^n$

c) $\frac{h^n}{h^2}$ (i) $h^{\frac{n}{2}}$ (ii) h^{2-n} (iii) $(h)^{n+2}$

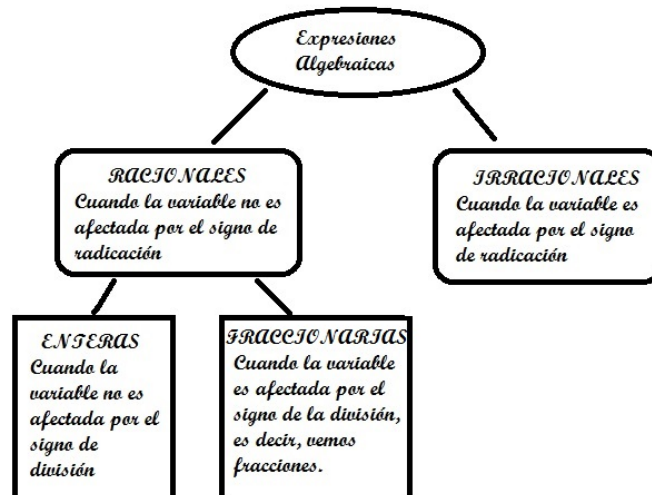
d) $x^2 - x2x + 2$ (i) $-x^2 + 1$ (ii) $x^{2+2} + 2$ (iii) $-x^2 + 2$

e) $\frac{2}{x^2-5x} + \frac{1}{x-5}$ (i) $\frac{3}{x^2-5x}$ (ii) $\frac{2-x}{x(x-5)}$ (iii) $\frac{3}{x-5}$

f) $3xy^2 - x^2y + 5y(xy)$ (i) $3(xy)^2 + 5xy + 5y^2$ (ii) $7xy$ (iii) $8xy^2 - yx^2$

Clasificación de las Expresiones Algebraicas

En el siguiente diagrama se presenta la clasificación de las expresiones algebraicas:



Ejercicio: Del ejercicio 1 anterior, clasifique las expresiones algebraicas.

3.2 Polinomios

Denominamos **polinomio** a toda expresión algebraica entera racional. Algunos ejemplos:

$$P(x) = 3x^2 - 5x + \sqrt{2}$$
$$Q(x, y) = 4x^2y + \frac{5}{3}xy^3 - x^2y^3$$

En este curso trabajaremos con polinomios de una variable, como el primer ejemplo. Por lo que vamos a definir:

Definición: Un polinomio es la suma expresiones de la forma:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

donde a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 son números reales, x es la indeterminada y $n, n - 1, \dots, 1, 0$ son números naturales.

Si $a_n \neq 0$ el grado de $P(x)$ es n , y la notación que usamos es: $gr(P(x)) = n$.

Ejemplo: $P(x) = -4x^7 + 5x^4 + 3x - 1$ es un polinomio de grado 7. En particular, cuando $a_i = 0, \forall i$, es decir, $0(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0$ se llama **polinomio nulo** y no tiene grado.

Ejercicio:

De acuerdo a la definición ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios?

- a) $P(x) = 7x^4 + 5x - 2$
- b) $Q(x) = \frac{5}{3}x^2 + \ln(2)x$
- c) $P(x) = \frac{1}{3}x^{-2} + 5x^2 - 2$
- d) $S(x) = x^7 + 5x^{\frac{3}{2}} - 2x^5$

Algunas características de los polinomios

- Se llama *monomio* a una expresión de la forma $M(x) = ax^n$, donde $a \in \mathbb{R}$, x es una indeterminada, $n \in \mathbb{N}$.
- Así como los polinomios de un sólo término se llaman monomios, los de dos términos se llaman *binomios* y los de tres, *trinomios*, nombres que seguramente ya conozcan.
- El coeficiente del monomio de mayor grado es el *coeficiente principal*.
- Si el coeficiente principal es 1, el polinomio se llama *mónico*.
- Al término a_0 se lo llama *término independiente*.
- Un polinomio está *ordenado* cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. En general ordenamos en forma decreciente.

3.2.1 Operaciones con Polinomios

Habrán notado ya que cualquier $a \in \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 0. Y la magia del álgebra nos permite definir las operaciones con polinomios, de manera que incluyan lo que ya sabemos del capítulo 2.

3.2.1.1 Suma y Resta

Cuando se suman o se restan dos polinomios el resultado es un polinomio. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, los coeficientes del resultado se obtienen sumando o restando los coeficientes respectivos de iguales potencias de la indeterminada en las expresiones de $P(x)$ y $Q(x)$.

Ejemplo: Sean $P(x) = -3x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = x^3 + 3x - 2$. Hallar $Q(x) + P(x)$ y $Q(x) - P(x)$, para estas operaciones nos conviene completar los polinomios ordenados.

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 + 3x - 2 \\ + 0x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^3 + 0x^2 + 3x - 2 \\ - (0x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \\ \hline \end{array}$$

Así $Q(x) + P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ Así $Q(x) - P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$
El resultado de la suma o la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o

tiene grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

Polinomios iguales y opuestos

Si al sumar dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ el resultado es el polinomio nulo $0(x)$, entonces $P(x)$ y $Q(x)$ son *polinomios opuestos*. Si al restarlos se obtiene $0(x)$, entonces *los polinomios son iguales*.

Ejercicios

1) Sean $P(x) = 2x - 8x^3 + 5x^2$ y $Q(x) = -x^6 + x - 4x^2 - 2x^7 + 7x^3$. Hallar $Q(x) + P(x)$ y $Q(x) - P(x)$.

2) Sean $S(x) = 4x^3 - 2$, $T(x) = -4x^3 + x$ y $W(x) = 6 - x$. Colocar el símbolo de $<$, $=$, $>$, según corresponda:

$$\begin{array}{l} gr(S(x)) \quad \dots \quad gr(S(x) + T(x)) \\ gr(S(x)) \quad \dots \quad gr(S(x) + T(x) + W(x)) \\ gr(S(x)) + gr(T(x)) \quad \dots \quad gr(S(x) + T(x)) \\ gr(S(x)) \quad \dots \quad gr(T(x)) \\ gr(W(x)) \quad \dots \quad gr(S(x) + T(x)) \end{array}$$

3) Hallar el opuesto de $P(x) = x^3 + 8 - (-x^5 + 2x^4)$.

3.2.1.2 Producto de Polinomios

Cuando se **multiplican** dos polinomios, el resultado es un polinomio y su grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores, si ellos no son nulos.

Para calcular el producto multiplicamos cada uno de los monomios de un polinomio por cada uno de los monomios del otro polinomio y sumamos.

Ejemplo: Si $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = x - 1$, entonces $P(x).Q(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 1) = x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 - x - 1$.

Ejercicios

1) Dados $P(x) = 2x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 4$ y $Q(x) = 8 - 3x^2 - 5x$. Hallar $P(x).Q(x)$.

2) Decidir si es Verdadero o Falso: “El grado del polinomio producto es siempre mayor que cada uno de los grados de los factores”. Justificar.

3) Hallar el grado, el coeficiente principal y el término independiente del polinomio $W(x) = P(x).Q(x)$, sabiendo que son ordenados y completos, que sus expresiones comienzan así y que sus coeficientes cumplen con la secuencia que se evidencia en sus primeros términos.

4) Sean $S(x) = 2x^3 - x + 2$, $T(x) = x - 3$ y $W(x) = -x^2 - x - 1$. Hallar:

a) $2[(S(x) + T(x)).W(x)]$

b) $\frac{1}{3}(T(x).T(x)) - 4W(x).S(x)$

3.2.1.3 División de Polinomios

Algoritmo de la División: Dados dos polinomios $P(x)$ (que llamaremos dividiendo) y $Q(x)$ (que llamaremos divisor), con $Q(x) \neq 0(x)$, existen y son únicos dos polinomios $C(x)$ (que llamaremos cociente) y $R(x)$ (que llamaremos resto) tales que:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

con $gr(R(x)) < gr(Q(x))$ o $R(x) = 0(x)$.

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 17x^2 + 15x - 8 \quad | \underline{3x - 4} \\
 -(6x^3 - 8x^2 + 0x + 0) \quad 2x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 -9x^2 + 15x - 8 \\
 -(-9x^2 + 12x + 0) \\
 \hline
 3x - 8 \\
 -(3x - 4) \\
 \hline
 -4
 \end{array}$$

Notarán el parecido con la división de números reales, aquí $C(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $R(x) = -4$, que podemos ver que $gr(R(x)) = 0 < gr(Q(x)) = 1$.

Podemos verificar que $6x^3 - 17x^2 + 15x - 8 = (3x - 4)(2x^2 - 3x + 1) + (-4)$.

Ejercicios

- 1) Sean $P(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$ y $Q(x) = 2x^2 + 3x$. Hallar el cociente y el resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$.
- 2) ¿Existe un polinomio $T(x)$ tal que $6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15 = T(x).(2x^2 - 3)$?
- 3) Hallar $S(x)$, si es posible, tal que $9x^5 + x^2 - 5x = (4x^2 - 5).S(x) + (x - 8)$.

Divisibilidad de polinomios

Si al realizar la división de $P(x)$ y $Q(x)$ el resto es nulo se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ o que $Q(x)$ divide a $P(x)$. Quedando entonces:

$$P(x) = Q(x).C(x)$$

En particular, si la división entre $P(x)$ y $(x - a)$ es cero. Decimos que a es raíz de $P(x)$.

Es decir: si analizamos $P(x) = (x - a).C(x)$ y reemplazamos x por el valor a , $P(a) = 0$.

Ejercicios:

1) Sean $P(x) = x^3 + 2x + 12$; $Q(x) = x - 2$ y $S(x) = x + 2$. Hallar el resto de las divisiones entre:

a) $P(x)$ y $Q(x)$

b) $P(x)$ y $S(x)$

Sacar conclusiones, relacionado con el concepto de raíz.

2) Calcular el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = 3x - 2$ divida a $P(x) = kx^3 + x^2 - k$.

3.2.2 Factorización

En el capítulo 2, usamos varias veces que un número puede ser escrito como producto de números primos, lo que facilitaba cálculos como la suma de números fraccionarios. Esta idea, se puede extender a los polinomios donde dado un polinomio $P(x)$ se puede descomponer como producto de polinomios primos.

Decimos que un polinomio $P(x)$ de grado no nulo es *primo o irreducible* cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado menor el $gr(P(x))$.

Definición: *Factorizar* un polinomio significa expresarlo como producto de polinomios primos o irreducibles.

Vamos a repasar algunas técnicas para expresar un polinomio como producto.

3.2.2.1 Factor Común

A veces sucede que en un polinomio $P(x)$ la variable x figura en todos sus términos.

En estos casos es muy conveniente extraer factor común. Observar que al extraer la variable x como factor común la extraemos elevada a la menor de sus potencias.

También en algunos ejemplos se extrae un número que es factor en todos sus coeficientes.

Ejemplo: $P(x) = 4x^5 + 8x^4 + 12x^2 = 4x^2(x^3 + 2x^2 + 3)$.

3.2.2.2 Factor Común por Grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo: $P(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 =$
 $= (7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) = x^4(7x - 5) + 2(7x - 5)$.

3.2.2.3 Diferencia de Cuadrados

Cuando se nos presenta la resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par, lo expresamos como diferencia de cuadrados.

Ejemplo: $P(x) = x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$.

3.2.2.4 Trinomio Cuadrado Perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio (dos términos) al cuadrado: $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$ Si elevamos al cuadrado a $x - 3$:

$$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3) = x^2 - 6x + 9$$

Las expresiones difieren en el término $6x$, en la primera es positivo y en la segunda negativo.

Miremos un ejemplo de un polinomio que sea un trinomio cuadrado perfecto:
 $P(x) = x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2$ (verifíquelo).

Ejercicio: Expresar los siguientes polinomios como producto usando la técnica que corresponda o más de una de ellas:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 6x^2$

2. $P(x) = x^6 - x^2$

3. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

4. $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$

5. $P(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$

6. $P(x) = 4x^2 + 4x + 1$

7. $P(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}$

8. $P(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$

3.3 Ecuaciones

3.3.1 Ecuaciones Lineales

Un polinomio lineal (o de grado 1) es un polinomio de la forma $P(x) = ax + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Si igualamos a cero este polinomio lineal en la variable x , $P(x) = 0$ obtenemos una ecuación de la forma: $ax + b = 0$

Esta igualdad significa la cuestión siguiente: ¿Existe algún valor real de x , digamos α , tal que $P(\alpha) = 0$? Y en ese caso ¿Cómo se halla α ?

Podemos entonces decir que tiene sentido la igualdad numérica, lo que nos conduce la siguiente definición:

Una **ecuación** es una relación de igualdad entre cantidades algunas de ellas desconocidas, llamadas **incógnitas**. Decimos que la ecuación $ax + b = 0$ es de una **ecuación de primer grado con una sola incógnita**. Una **solución** de una ecuación algebraica con una incógnita x es un valor α tal que al reemplazar x por α en la ecuación esta se transforma en una identidad numérica.

Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución y en tal caso hallarlas.

Ejemplos

- (a) $3x - 9 = 0$, tiene solución $x = 3$.
- (b) $2x + 1 = 2x$, no tiene solución.
- (c) $(x - 1) = 5$ tiene solución $x = 6$.

Ejemplo de resolución:

Sea la ecuación: $2x + 4 = 12$,

resto 4 a ambos miembros: $2x + 4 - 4 = 12 - 4$ entonces $2x = 8$

Multiplico por $\frac{1}{2}$ ambos miembros: $\frac{1}{2}, 2x = \frac{1}{2}, 8$, entonces $x = 4$.

Para resolver la ecuación $ax + b = 0$ se deben utilizar operaciones elementales y las propiedades de los números reales. (Es lo que por lo general llamamos pasajes de términos).

3.3.2 Ecuaciones Cuadráticas

Un polinomio cuadrático es una expresión algebraica que tiene la siguiente forma:

$P(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Como en el caso anterior, si igualamos el polinomio a 0, es decir, $P(x) = 0$, se obtiene una **ecuación cuadrática**:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ud. ya habrá inferido que esto puede seguir para ecuaciones cúbicas (o de grado 3), y así, siguiendo el término de mayor grado. En este curso sólo resolveremos las de grado 1 y 2, las de grado superior para encontrar la solución buscamos factorizar por los casos ya mencionados.

Pero falta responder la pregunta: ¿Cómo resolvemos una ecuación cuadrática?

Analicemos algunas características (vaya tratando de hacer las cuentas que justifiquen su respuesta):

1. ¿Es verdad que si la ecuación lineal tiene coeficientes racionales, entonces su solución (si la tiene) también es un número racional?
2. ¿Lo anterior es cierto para las ecuaciones cuadráticas? Para verlo considere la ecuación cuadrática: $x^2 = 2$.
3. Un tipo de ecuación cuadrática un poco más complicada que la anterior es la de la forma: $(x - a)^2 = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe con (i) $a = 2, b = 3$; (ii) $a = 1, b = 0$; (iii) $a = 7, b = -5$. (Compare con lo visto en radicación de números).
4. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

- $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}$
- $(1 - x)^2 = \sqrt{2}$
- $(2x + 1)^2 = 4$
- $(3 - 2x)^2 = 0$

3.3.2.1 Método de Completar Cuadrados

Se trata de transformar una ecuación cuadrática cualquiera en una ecuación equivalente, pero cuyo aspecto sea el de las estudiadas en el análisis anterior. Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (se entiende ya que $a \neq 0$, porque sino no tendría grado 2), seguiremos los siguientes pasos:

(Para una lectura más amigable se presenta el desarrollo junto a un ejemplo, se

recomienda leer paso a paso.)

<p>Paso 1: “limpiamos a x^2”</p> <p>Multiplicamos por $\frac{1}{a}$ (ya que $a \neq 0$),</p> $\frac{1}{a}ax^2 + \frac{1}{a}bx + \frac{1}{a}c = \frac{1}{a}0$ <p>Paso 2: ¿Quién es doble producto?</p> <p>Reescribimos el coeficiente, b, de x:</p> $\frac{b}{a} = 2\frac{b}{2a}, \text{ la ecuación queda:}$ $x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$ <p>Paso 3: ¿Hay un trinomio cuadrado?</p> <p>Recordar: $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$</p> <p>podemos escribir nuestra ecuación como:</p> $x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$ <p>Y “despejando”: $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$</p> <p>y tiene la forma que estudiamos antes.</p> <p>Paso 4: Sumamos fracciones</p> <p>común denominador $4a^2$, quedando:</p> $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ <p>Tenemos así dos soluciones distintas¹:</p> $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	<p>Veamos un ejemplo: $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} = 0$</p> <p>Paso 1: multiplicamos por 2:</p> $2\frac{x^2}{2} + 2 \cdot x \cdot 2 - 2\frac{3}{2} = 2 \cdot 0$ $x^2 + 4x - 3 = 0$ <p>Paso 2: Sea b el doble de alguien, $b = 2p$, pensando al $4 = 2 \times 2$, queda: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 - 3 = 0$</p> <p>Paso 3: Sumamos y restamos para obtener el trinomio cuadrado. Para ello, como:</p> $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ <p>Nuestra ecuación queda:</p> $(x + 2)^2 - 4 - 3 = 0$ <p>“Despejamos”, $(x + 2)^2 = 7$</p> <p>Paso 4: seguimos despejando x, para ello aplicamos raíz (ver sección 2.5.2) hay dos posibilidades: $x + 2 = +\sqrt{7} \vee x + 2 = -\sqrt{7}$</p> <p>Luego, $x_1 = -2 + \sqrt{7} \wedge x_2 = -2 - \sqrt{7}$</p>
---	--

¹Recordemos que una fracción es positiva cuando su numerador y su denominador tienen el mismo signo. En nuestro caso $4a^2 > 0$, y entonces el miembro de la derecha será positivo sólo cuando $b^2 - 4ac > 0$.

Hemos demostrado una fórmula que tal vez al lector le resulte conocida del colegio secundario:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

La importancia de conocer el método de completar cuadrados, no sólo nos permi-

te demostrar esa fórmula, también será útil en matemática 1, cuando trabajemos con cónicas, donde la ecuación tiene dos variables, y no se puede aplicar esta fórmula.

Ahora, ¿qué ocurre si $b^2 - 4ac < 0$ y si $b^2 - 4ac = 0$?

El número $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación.

Ejercicio: Según lo analizado, complete el siguiente cuadro:

Discriminante	Cantidad de soluciones	Soluciones
$b^2 - 4ac > 0$	2	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$b^2 - 4ac = 0$		
$b^2 - 4ac < 0$		

La fórmula deducida para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática es completamente general, o sea que puede aplicarse a cualquier ecuación de segundo grado. Muchas veces la forma de la ecuación permite una solución más rápida y sencilla. Por ejemplo:

- Si Ud. quiere resolver la ecuación: $x^2 - 2 = 0$, puede aplicar la fórmula, pero es algo similar a sacar el auto del garaje para ir a la casa de su vecino. La ecuación se resuelve simplemente despejando: $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.
- Algo similar ocurre con todas las ecuaciones a las que les falta el término en x : $2x^2 - 3 = 0 \rightarrow 2x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- Las ecuaciones cuadráticas a las que les falta el término constante (“les falta c ”), se resuelven sacando el factor común ax , por ejemplo: $-3x^2 + 4x = 0 \rightarrow -3x(x - \frac{4}{3}) = 0$, y como sabemos un producto es 0, cuando al menos uno de los factores es 0, $-3x = 0 \vee x - \frac{4}{3} = 0$, de donde tenemos dos soluciones: $x_1 = 0 \wedge x = \frac{4}{3}$.

Ejercicio: Dada la ecuación: $14x^2 = 2x$, la podemos resolver de dos maneras:

- Sacando factor común:

$$14x^2 = 2x$$

$$14x^2 - 2x = 0$$

$$14x(x - \frac{1}{7}) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{7}$$

- Dividiendo por x a ambos lados de la igualdad:

$$14x^2 = 2x$$

$$14x = 2$$

$$x = \frac{1}{7}$$

Responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la opción correcta al problema?
2. ¿Por qué considera correcta su respuesta?
3. ¿Por qué es incorrecta la otra respuesta?
4. ¿Cuál fue el error que condujo a la respuesta incorrecta?

3.3.3 Ejercicios

1. Resolver justificando cada paso.

- $10 - 3x = x - 2$

- $a - x = 3(x - a)$

- $3(2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1 - x) + \frac{x+3}{2}$

- $\frac{1}{3}x - x = \frac{1}{4}x + 1$

- $5x + 2 = 8x - \frac{1}{2} - 3x$

2. Resuelva las ecuaciones e indique el conjunto numérico al que pertenecen.

- $10 = x - 2$

- $x = 3(x - 5)$
- $\frac{3x}{2} - \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$
- $\sqrt{5} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x + 1$
- $5\pi x + 2\pi = 8x - \frac{\pi}{2}$
- $x + 3 - \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}(x + 5) + 2$
- $3(2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2}(1 - x) + \frac{1}{2}(x + 3)$

3. Resuelva despejando la incógnita:

- (i) $m^2 - 12 = 0$ (ii) $n^2 + 25 = 0$ (iii) $3y^2 - 45 = 0$
 (iv) $4u^2 - 9 = 0$ (v) $(d - 3)^2 - \frac{1}{2} = 0$ (vi) $(y + 1)^2 - 9 = 0$
 (vii) $\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2} = 0$ (viii) $w^2 - 25 = 0$ (ix) $\frac{49}{4}d^2 = 1$

4. Resuelva sacando factor común:

- (i) $12m^2 + m = 0$ (ii) $9n^2 + 9n = 0$ (iii) $7y^2 = -4y$
 (iv) $6u^2 - u = 0$ (v) $x^2 = 2x$ (vi) $(\frac{y}{2})^2 - \frac{1}{2}y = 0$

5. Determine el valor de k que transforme a cada expresión en un trinomio cuadrado perfecto:

- (i) $x^2 + 9x + k$ (ii) $x^2 + kx + 36$
 (iii) $x^2 - 8x + k$ (iv) $x^2 + 2kx + \frac{81}{4}$

Para los valores hallados de k , resuelva las ecuaciones que se forman al igualar las expresiones algebraicas anteriores a 0.

6. Resuelva completando cuadrados:

- (i) $x^2 + 6x = 7$ (ii) $x^2 - 8x + 11 = 0$ (iii) $4x^2 = 12x + 11$
 (iv) $x^2 - 10x + 5 = -20$ (v) $(x - 1)(x - 3) = 1$ (vi) $\frac{5x^2}{3} + 3x + 1 = 0$

7. Utilice el discriminante para completar la siguiente tabla:

Ecuación	Discriminante	Cantidad de soluciones
$\frac{x^2}{3} - 2x + 6 = 0$		
$2x^2 - 6x + 3 = 0$		
$\sqrt{3}x^2 = -x - 2$		
$2x^2 = 2x + 1$		
$0,32x^2 - 0,75x - 0,66 = 0$		
$ax^2 = -bx$		
$x^2 = (a + b)x - ab$		

Encuentre las soluciones de las ecuaciones anteriores.

3.3.4 Ecuaciones Fraccionarias

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias, como por ejemplo: $\frac{-3x^2+1}{x^3+6x}$ pueden pensarse como cociente de polinomios. Si transformamos esta expresión en una ecuación. ¿cómo la resolvemos?

Es posible, operando de manera conveniente, transformarla en una ecuación no fraccionaria, y entre las soluciones estarán las soluciones de la ecuación original, pero CUIDADO pueden aparecer otras soluciones, resolvamos un ejemplo:

Sea la ecuación

$$\frac{4x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} + 1 = 0 \quad \text{recuerde que } 1 = \frac{1}{1}$$

Sumamos las 3 fracciones, utilizando el mínimo común múltiplo, para ello es muy importante reconocer y usar los métodos de factorización. En este caso, usamos diferencia de cuadrados.

$$\frac{4x-2(x+1)+1(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

Operando, es decir, propiedad distributiva y sumando,

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = 0$$

Para que una división dé como resultado 0, el denominador debe ser 0, es decir $x^2 + 2x - 3 = 0$. Resolvemos (verifíquelo) la ecuación cuadrática tiene dos soluciones: $x = 1 \wedge x = -3$. Sin embargo, $x = 1$ es una solución mentirosa, ya que si la reemplazamos en la ecuación fraccionaria, estaríamos dividiendo por 0. **Importante:** Debemos descartar inicialmente $x = 1 \wedge x = -1$ de las posibles soluciones ya que nos llevarían a soluciones mentirosas porque no podemos dividir por cero!!!

Ejercicio: Resolver las siguientes ecuaciones (indicar los valor/es de x no permitidos).

1. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-2x}$

2. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = 1$

3. $1 + \frac{1}{x} = x(1 - \frac{x+1}{x})$

4. $\frac{6}{x^2-9} = 3$

5. $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x+1}$

6. $\frac{3x-3}{x^2-1} = 2x$

3.4 Sistemas de Ecuaciones

Cuando uno trabaja con problemas aplicados, por lo general, tenemos varias cantidades desconocidas, y también varias condiciones que las verifican, es decir, que ya no tenemos una ecuación sino un sistema de ecuaciones.

En este curso veremos **sistemas de ecuaciones lineales** (todas las ecuaciones involucradas tienen grado 1) o sistemas de ecuaciones con una ecuación de grado 2 (en una o ambas incógnitas).

A esta altura del capítulo no le sorprenderá que dado un sistema de ecuaciones puede tener solución o no. Pero, ¿cómo los resolvemos? Consideraremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Veamos dos métodos para resolver los sistemas de ecuaciones.

3.4.1 Método de Sustitución

Consiste en “despejar” una de las incógnitas de una de las ecuaciones y reemplazarla otra. Resolvamos el ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Podemos fácilmente despejar x de la primera ecuación, sumando y a ambos lados de la igualdad,

$$\begin{cases} x = 2 + y \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Si reemplazamos la primera ecuación en la segunda, obtenemos una única ecuación con una única incógnita,

$$3(2 + y) - y = 1 \quad \text{aplicamos distributiva, } 6 + 3y - y = 1$$

Resolvemos la ecuación lineal (verifique), y tenemos como solución: $y = \frac{-5}{2}$; pero no nos olvidemos de la x ... para ello volvemos a la primera ecuación, donde despejamos $x = 2 + y \rightarrow x = \frac{-1}{2}$

3.4.2 Método de Suma y Resta

Por medio de sumar (o restar) las ecuaciones, se “elimina” una de las incógnitas, a veces es necesario multiplicar por una constante una de las ecuaciones. Resolvamos el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Podemos fácilmente restar ambas ecuaciones, por ejemplo a la ecuación 2 le restamos la primera (esto se traduce en multiplicar la ecuación 1 por -1, y sumarlas), eliminando la incógnita y , hagámoslo:

$$\begin{cases} -x + y = -2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Sumando obtenemos una única ecuación con una única incógnita,

$$2x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Si en cambio, si multiplicamos la ecuación 1 por -3 y sumamos, es decir, tendríamos el sistema:

$$\begin{cases} -3x + 3y = -6 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Sumando obtenemos una única ecuación con una única incógnita,

$$2y = -5 \rightarrow y = \frac{-5}{2}$$

En matemática 1, utilizaremos este método para operar matrices.

3.4.3 Sistemas de Ecuaciones Mixtos

Los métodos vistos en las secciones anteriores no sólo sirven para resolver sistemas lineales, cuando se trata de sistemas de ecuaciones mixtos el método de sustitución resulta el más conveniente, ya que podemos despejar la ecuación lineal y reemplazarla en la ecuación de grado superior. Nuevamente, resolvamos un ejemplo donde x e y son incógnitas y k es una constante:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$$

Despejando y de la primera ecuación y reemplazando en la segunda, obtendremos:

$$x^2 + (1 + x)^2 = k \rightarrow x^2 + 1 + 2x + x^2 - k = 0$$

Ecuación cuadrática que ya puede resolver (hacer las cuentas necesarias),

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 8(1-k)}}{4} \wedge x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 8(1-k)}}{4} \quad 1$$

Luego que tenga las soluciones de x , recuerde reemplazar en la ecuación lineal, para obtener las soluciones de y . Queda para el lector completar este reemplazo, donde claramente nos queda una dependencia del valor de la constante k .

Dijimos que un sistema de ecuaciones puede tener solución o no. Volvamos nuestro ejemplo, analizando las distintas soluciones dependiendo de la constante k [1].

Si miramos el discriminante de la ecuación cuadrática $4 - 8(1 - k)$ este número puede ser positivo, cero o negativo.

- si $4 - 8(1 - k) > 0 \rightarrow k > \frac{1}{2}$ en este caso la ecuación tiene dos soluciones; y por consiguiente el sistema también.
- si $4 - 8(1 - k) = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$ en este caso la ecuación tiene una solución; y por consiguiente el sistema también.
- si $4 - 8(1 - k) < 0 \rightarrow k < \frac{1}{2}$ en este caso la ecuación cuadrática No tiene solución; y por consiguiente el sistema tampoco.

Ejercicio: Resolver

$$1. \begin{cases} 3x - y = \frac{1}{2} \\ 2x - 3y = \frac{-5}{6} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 2y \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$$

¹dependiendo del valor de k que analizaremos después

$$4. \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \\ z - 3x = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 5 \\ -5x + y = -7 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y = \sqrt{3}x + 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -x + y = 2 \\ x^2 - 6x + 8 = y \end{cases}$$

3.5 Problemas de aplicación

Aquí van algunos consejos para intentar la resolución de un problema.

1. Leerlo con detenimiento, varias veces si fuera necesario, hasta que lo haya entendido. Trate de determinar qué se quiere encontrar y cuáles son los datos con los que se cuenta.

2. Haga un dibujo o diagrama que lo ayude a entender la situación.

3. Represente una de las cantidades a determinar con una letra (por ejemplo x).

Trate de representar las otras cantidades en términos de x .

4. Plantear la o las ecuaciones que las relacionan las cantidades conocidas con las incógnitas.
5. Resolver la o las ecuaciones.
6. Analizar si las soluciones obtenidas son solución del problema y verificar.

Problema: *“Hace dos años la edad del padre era cuatro veces la edad del hijo. Dentro de dos años, edad del hijo será la tercera parte de la edad del padre. Hallar las edades actuales.”*

Resolución:

Luego de las lecturas necesarias, identificamos las incógnitas: $p =$ “edad del padre hoy” y $h =$ “edad del hijo hoy”. Hay que ser lo más claros posibles al escribir las variables, NO es correcto decir: $p =$ padre.

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p - 2 = 4(h - 2) \\ h + 2 = \frac{p+2}{3} \end{cases}$$

La primera ecuación nos sitúa dos años atrás, y por eso a las edades actuales les restamos 2; análogamente cuando pasen 2 años le sumamos 2 a ambos, ya que el tiempo pasa de igual forma para ambos. **Resolvamos el sistema de ecuaciones**, por ejemplo, usemos el método de sumas y restas. Para esto debemos ordenar el sistema.

$$\begin{cases} p - 4h = -6 \\ \frac{-1}{3}p + h = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumando eliminamos p .

Resolviéndolo (completar) llegamos a que $h = 10$, y luego, por la primera ecuación $p = 34$.

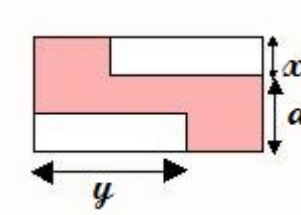
Solución: las edades actuales del padre y del hijo son 34 y 10 años respectivamente.

Ejercicio: Resuelva los siguientes problemas.

- Una modista desea cortar una cinta de 213cm de longitud en tres tramos. Si cada tramo debe tener 2cm más que el anterior, ¿cómo debe hacer los cortes?
- Si el ángulo vértice de un triángulo isósceles mide 64° , hallar la medida de los otros ángulos del triángulo.
- Una persona dispone de 28m de cerca para construir un corral rectangular. Si se desea que el corral mida 6m más de longitud que de ancho, calcular sus dimensiones.
- Un cable que mide 60cm se corta en 4 tramos, y cada tramo sucesivo tiene el doble de longitud que el anterior. Hallar la longitud del tramo más largo.
- Un cartel en una mueblería dice “lleve los dos por \$655”. Si una silla cuesta \$55 más que una banqueta, ¿cuánto cuesta la silla?
- Si el ancho de una pileta de natación rectangular es la tercera parte de su longitud y se sabe que su perímetro es de 96m , determinar las dimensiones del natatorio.
- Si uno de un par de ángulos suplementarios mide 35° más que el otro, ¿cuántos grados mide el ángulo menor?

3.6 Más ejercicios del Capítulo 3

- Determine la expresión algebraica que describe el área sobreada de la figura:



- Determina los valores de d que completen el cuadrado en cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

(a) $x^2 + 9x + d$ (b) $x^2 + dx + 36$ (c) $x^2 + 13x + d$
 (d) $x^2 - 8x + d$ (e) $x^2 + dx + \frac{81}{4}$ (f) $x^2 - dx + 121$

3. Determina si las dos ecuaciones son equivalentes:
 (a) $x^2 + 1 = 4$ $x = 4$ (b) $x^2 + 25 = -5$
 (c) $x = \sqrt{9}$ $x = 3$ (d) $x = \sqrt{25}$ $x = 5$
4. Resuelve la ecuación SIN USAR la fórmula de la ecuación cuadrática:
 (a) $25x^2 = 9$ (b) $x^2 = 361$
 (c) $(x - 3)^2 = 17$ (d) $4x(x + 2)^2 = 11$
5. Resolver completando cuadrados:
 (a) $x^2 + 6x + 7 = 0$ (b) $x^2 - 8x + 11 = 0$
 (c) $4x^2 - 12x - 11 = 0$ (d) $4x^2 + 20x + 13 = 0$
6. Resuelve con la fórmula cuadrática:
 (a) $5x^2 + 13x = 6$ (b) $\frac{3}{2}x^2 - 4x = 1$
 (c) $\frac{5}{x^2} - \frac{10}{x} = -2$ (d) $24x + 9 = -16x^2$
7. Para cada una de las ecuaciones siguientes, encuentra, si es posible, las soluciones que sean reales y verifica.
 (a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (b) $x^3 - 3x^2 + x = 0$ (c) $8x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
 (d) $x(3x + 1)(5x - 6) = 0$ (e) $6x^2(x - 1) = 2(x - 1)$ (f) $x^2 - 4 = x^3 - 2x^2$
8. Despeje la variable especificada.
 (a) $K = \frac{1}{2}mv^2$ v .
 (b) $A = 2\pi r(r + h)$ r .
 (c) $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ t .
9. (Ejercicio para pensar) Encontrar todos los polinomios con coeficientes reales tales que verifiquen la ecuación:

$$P(x)^2 = 2x(P(x) + 1) + 1$$

10. Hallar el polinomio $P(x)$, sabiendo que es divisible por $Q(x) = 2x^5 - 3x^2 - 2x - 1$, el cociente es $C(x) = 2x^3 + 4x$ y el resto es $R(x) = -3x^2 + 6x + 1$.
11. Sabiendo que al dividir $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x - 6$ por $Q(x)$ se obtiene como cociente $C(x) = 3x - 6$ y como resto $R(x) = 3x - 4$. Responde justificando tus respuestas: ¿Puede ser $Q(x)$ de grado 1? ¿Puede calcularse $Q(x)$ con estos datos? En tal caso, ¿cuál es el polinomio $Q(x)$?

12. Encuentra todos los valores de k tales que $P(x)$ sea divisible por el polinomio lineal dado en cada caso:

$$P(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 11 \quad x + 2$$

$$P(x) = k^2x^3 - 4kx + 3 \quad x - 1$$

13. Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales, y escriba el conjunto solución:

$$(a) \begin{cases} \frac{x-\frac{x}{2}}{3} + \frac{x+y}{4} = 1 \\ \frac{2y-3}{4} - \frac{2y-x}{2} = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y-3}{2} = \frac{1}{6} \\ \frac{3(y-2)}{2} - \frac{6x+3}{6} = -\frac{3x-7}{3} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x + \frac{3(3x-y)}{5} = 2x - \frac{4y}{3} - 5 \\ 3x + \frac{3}{2} = -\frac{11y}{2} \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

14. Encuentre dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 168.

15. La suma de un número y su recíproco es $\frac{10}{3}$. Encuentre el número. (Recíproco de a es $\frac{1}{a}$).

16. Encuentre la base y la altura de un triángulo cuya área es de $2m^2$ si su base es $3m$ más larga que su altura.

17. Cuarenta alumnos deben ser distribuidos para prácticas de linux o de java. En cada grupo de linux hay 8 alumnos, mientras que en los de java 2; el número de grupos de linux supera en 10 a los de java. ¿Cuántas grupos de linux y cuántos de java se realizarán?

18. Dos personas están acomodando una gran cantidad de sillas en un patio de manera de formar un cuadrado. Una sugiere una manera, pero le sobran 39 sillas. La otra, entonces propone sumarle una silla más a cada fila, pero le faltan 50 sillas. ¿Cuántas sillas tenían?

19. Determinar la longitud de la base y la altura de un paralelepípedo rectángulo de base cuadrada, si el volumen es de $12cm^3$ y su superficie lateral es de $24cm^2$.

20. La diferencia de los perímetros de dos círculos es de 6π y la suma de sus áreas 17π . ¿Cuáles son las medidas de sus radios?